

ANÁLISIS DE LA DINÁMICA DE LA EXPLOTACIÓN PESQUERA – RECURSO RENOVABLE- UTILIZANDO DIAGRAMA DE FASE¹²

CASPARRI, MARÍA TERESA - GARCÍA FRONTI, VERÓNICA - VILKER, ANA SILVIA

*Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la
Gestión (CMA), Universidad de Buenos Aires, Córdoba 2122*

1120AAQ Ciudad Autónoma de Buenos Aires República Argentina

casparri@econ.uba.ar vgarciafronti@hotmail.com anavilker@gmail.com

Resumen

El objetivo de este trabajo es introducir a los alumnos de la Licenciatura en Economía y Actuario en el uso de diagramas de fases mediante su empleo en un modelo económico. Esta herramienta es muy utilizada en varias de las materias de grado cursadas por los estudiantes, por lo que es necesario que los mismos puedan utilizarla con solvencia en sus actividades futuras ya sean académicas o profesionales. El diagrama de fase permite analizar la dinámica de un modelo alrededor del punto de equilibrio sin conocer específicamente las funciones que lo integran.

En la primera parte del trabajo se introducirán los conceptos matemáticos utilizados para la confección de un diagrama de fase. Luego se presentará un ejemplo numérico de un sistema de dos ecuaciones diferenciales autónomo y se estudiará el comportamiento de la solución mediante la herramienta desarrollada. Por último, en base al libro de Silberberg (*The Structure of Economics. A Mathematical Analysis*) se plantea un modelo económico de explotación pesquera en donde se conoce en forma general la curva de crecimiento del recurso y la función de utilidad del consumo del bien.

Palabras Clave: recurso renovable – diagrama de fase

¹ Este trabajo fue presentado en las XXIX Jornadas Nacionales de Docentes de Matemática de Facultades de Ciencias Económicas y afines realizadas en Santa Rosa, La Pampa.

² Este trabajo fue realizado en el marco de los proyectos de investigación: UBACyT 2011-2014 “Aspectos financieros que impactan en dinámicas industriales innovadoras en Argentina: Agro, medicamentos y turismo” y PICT 2011-0919 Gobernanza Financiera: Las propuestas de regulación y sus impactos socioeconómicos. El caso de Argentina. Dirigidos por la Dra. María Teresa Casparri.

ANALYSIS OF THE DYNAMICS OF FISHING OPERATIONS - RENEWABLE RESOURCE - USING PHASE DIAGRAM

CASPARRI, MARÍA TERESA - GARCÍA FRONTI, VERÓNICA - VILKER, ANA SILVIA

*Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la
Gestión (CMA), Universidad de Buenos Aires, Córdoba 2122*

1120AAQ Ciudad Autónoma de Buenos Aires República Argentina

casparri@econ.uba.ar vgarciafronti@hotmail.com anavilker@gmail.com

Abstract

The aim of this paper is to introduce students of degree in Economics and Actuary in the employment of phase diagram by its use in an economic model. This tool is used in several of the subjects studied by undergraduate students, so it is necessary that they can use it with competence in his future endeavors whether academic or professional. The phase diagram allows to analyze the dynamics of a model around breakeven without specifically knowing the functions in it.

In the first part of the work mathematical concepts used for the preparation of a phase diagram are introduced. Then a numerical example of a system of two differential equations autonomous is presented and behavior of the solution is studied using the developed tool. Finally, based on the Silberberg's book (The Structure of Economics. A Mathematical Analysis) an economic model of fisheries exploitation arises, where it is known in general the growth curve of the resource and the utility function of consumption of good. The dynamics of this model is analyzed by making the phase diagram, allowing to apply mathematical concepts discussed above to a particular economic problem.

Key words: renewable resource – phase diagram

1. Introducción

El análisis de la dinámica de sistemas de ecuaciones diferenciales utilizando diagramas de fase es frecuentemente utilizado en los modelos económicos presentando especial interés cuando las funciones presentes en el modelo no son conocidas y sólo es conocido el signo de las derivadas, en estos casos también es posible establecer el diagrama de fase del sistema y analizar cualitativamente la dinámica del mismo.

En la primer parte del trabajo se describen los pasos a seguir para confeccionar un diagrama de fase cuando la función del sistema no es conocida, sólo se conoce el signo de sus derivadas primeras. Luego se plantea un ejemplo de un sistema de ecuaciones lineales en el que se analiza su dinámica a través del diagrama de fase y por último se plantea un modelo económico y se estudia su dinámica mediante la misma herramienta.

2. Fundamentación

El diagrama de fase es una herramienta que permite analizar en forma gráfica cualitativa el comportamiento de la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo. A continuación se describirá el procedimiento utilizado para confeccionar un diagrama de fase cuando se presenta un sistema de ecuaciones diferenciales de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x(t), y(t)) \\ \frac{dy}{dt} = \dot{y} = g(x(t), y(t)) \end{cases}$$

Para confeccionar el diagrama de fase es requisito que el sistema sea autónomo, es decir la derivada de las variables x e y con respecto al tiempo no dependen explícitamente del tiempo. Ambas funciones, f y g , pueden

o no ser lineales. Para poder graficarlo en el plano cartesiano se analiza un sistema con dos variables.

Lo que interesa analizar de este sistema es el comportamiento de las dos variables con respecto al tiempo. Para esto vamos a determinar el o los puntos de equilibrio intertemporal y las curvas de demarcación para luego analizar la configuración del sistema, es decir mediante el signo de \dot{x} e \dot{y} determinar el sentido de movimiento de las variables x e y en el plano y así inferir como se mueven a medida que transcurre el tiempo.

Equilibrio o equilibrio intertemporal: El o los puntos de equilibrios son aquellos puntos del plano (x,y) para los cuales las dos funciones f y g , se anulan simultáneamente.

Curvas de demarcación: Las dos curvas de demarcación del sistema dado representan la gráfica de las dos ecuaciones:

$$\dot{x} = 0 \quad , \quad \dot{y} = 0$$

Para todos los puntos (x, y) sobre la curva de demarcación $\dot{x} = 0$ el valor de x se mantiene constante con respecto al tiempo. De la misma forma, para todos los puntos (x, y) sobre la curva de demarcación $\dot{y} = 0$ el valor de y se mantiene constante con respecto al tiempo.

En el gráfico 2 se graficaron dos posibles curvas de demarcación. En el cruce de ambas curvas se encuentra el punto de equilibrio, en cualquier otro punto del plano (x, y) que no sea el punto de equilibrio las variables (ambas o sólo una de las dos como sucede sobre las curvas de demarcación) se modificarán con el transcurso del tiempo. A los efectos de plantear el procedimiento se supone: $f_x < 0$; $f_y > 0$; $g_x < 0, g_y > 0$ y asimismo se supondrá que:

$$\frac{-f_x}{f_y} > \frac{-g_x}{g_y}$$

Si se supone que se puede aplicar el teorema de la función implícita³ esto permite evaluar la pendiente de la curva $\dot{x} = 0$, en el plano de coordenadas, de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx}_{\dot{x}=0} = -\frac{f_x}{f_y} (f_y \neq 0)$$

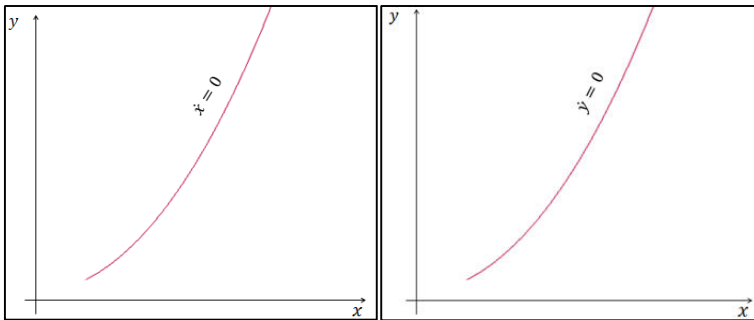
Como se supuso que: $f_x < 0$ y $f_y > 0 \rightarrow$ la curva $\dot{x} = 0$ tendrá pendiente positiva (ver Gráfico 1)

Haciendo el mismo análisis para la curva $\dot{y} = 0$:

$$\frac{dy}{dx}_{\dot{y}=0} = -\frac{g_x}{g_y} (g_y \neq 0)$$

Como se supone que: $g_x < 0$ y $g_y > 0 \rightarrow$ la curva $\dot{y} = 0$ tendrá pendiente positiva (ver Gráfico 1)

Gráfico 1. Curvas de demarcación

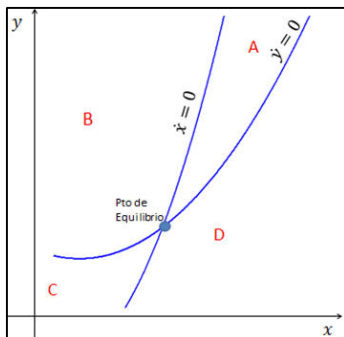


En este ejemplo además se supuso que la pendiente de la curva $\dot{x} = 0$ es más empinada que la pendiente de la curva $\dot{y} = 0$ por lo tanto al

³ El enunciado del teorema así como ejemplos de su aplicación se encuentran en el Alpha Chiang (2006)

superponer los dos gráficos de la curva de demarcación se observa que las dos curvas se cruzan en un solo punto⁴ que es el punto de equilibrio y dividen el espacio de fase en cuatro regiones: A, B, C y D (ver Gráfico 2)

Gráfico 2. Curvas de demarcación y punto de equilibrio



Si se quiere conocer la dinámica del sistema ¿cómo se interpreta este gráfico en donde el tiempo no aparece explicitado? Por un lado se sabe que en el punto de equilibrio las variables x e y se mantienen constantes a medida que transcurre el tiempo. Pero fuera del equilibrio a medida que pasa el tiempo las variables x e y van a ir cambiando. A continuación se mostrará una forma de determinar la dirección en que se moverán dichas variables.

Siempre que se atraviesa la curva de demarcación de $\dot{x} = 0$, la variable x se modifica, de la misma forma siempre que atraviesa la curva de demarcación $\dot{y} = 0$ la variable y no varía.

Con respecto a los otros puntos del plano se realiza el siguiente análisis. Se considera primero que sólo se modifica la variable x , es decir que la

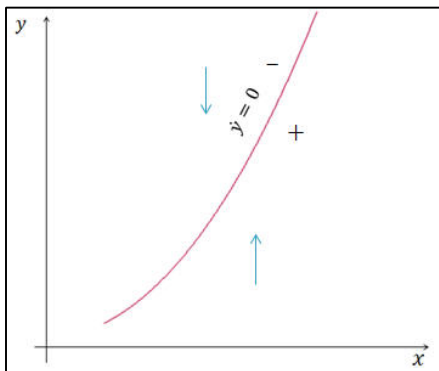
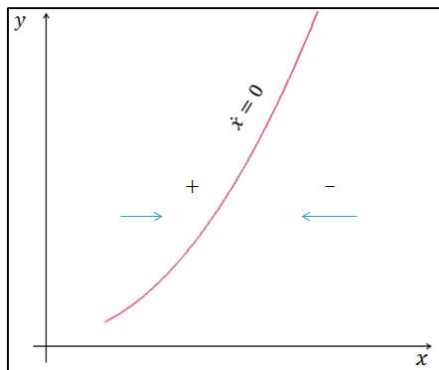
⁴ Para simplificar el análisis se hace el análisis suponiendo que hay un solo punto de equilibrio. En el caso que hubiera más puntos de equilibrio el procedimiento para confeccionar el diagrama de fase es similar al planteado aquí.

variable y se mantiene constante. La curva de demarcación $\dot{x} = 0$ divide al plano en dos semiplanos, en ambos semiplanos la variable x seguro se modifica ya que $\dot{x} \neq 0$, puede ser que $\dot{x} > 0$ o que $\dot{x} < 0$. Como se supuso que $f_x < 0$ y dado que $\dot{x} = f(x, y)$:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = f_x, \text{ por lo tanto: } \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} < 0$$

Esto permite inferir que a medida que x se incrementa (nos movemos de oeste a este en el plano xy) \dot{x} experimenta una disminución. Es decir, \dot{x} disminuye a medida que x aumenta con el tiempo. Por lo tanto, al moverse en el sentido de las x positivas \dot{x} empieza tomando valores positivos antes de llegar a la curva de demarcación en donde se anula el valor de \dot{x} y luego de pasar la curva de demarcación \dot{x} toma valores negativos. Gráficamente esto se indica con las flechas direccionales que como puede verse en el gráfico 3 cuando $\dot{x} > 0$ la flecha se mueve en el sentido de izquierda a derecha, mientras que cuando $\dot{x} < 0$ la flecha tiene sentido derecha izquierda. Es importante destacar que con la flecha direccional se indica solamente el sentido en que se mueve la variable x a medida que transcurre el tiempo. Con respecto a la variable y se puede efectuar el mismo análisis teniendo en cuenta que se considera que la variable x se mantiene constante. En el gráfico 3 se muestra también las flechas de dirección cuando se considera que se modifica solo la variable y .

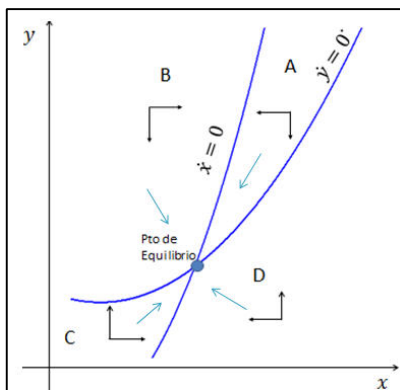
Gráfico 3



En base a esto se puede graficar el conjunto de las flechas direccionales, es decir en qué sentido se mueven x e y y así determinar la configuración del sistema. En el gráfico 4 se juntaron ambos gráficos y se obtuvo el diagrama de fase del sistema. En este gráfico se observa que en las 4 zonas se tienen direcciones de movimiento diferentes. Por ejemplo en la zona A las flechas nos indican que a medida que pase el tiempo ambas variables van a disminuir mientras que en la zona B la variable y disminuye mientras que la x aumenta.

Para entender mejor la flechas direccionales se pueden dibujar unas trayectorias de fase en el diagrama de fase que nos sirven para entender mejor la dinámica del sistema según en qué punto se inicie el movimiento (en el gráfico se han dibujado cuatro trayectorias de fase). Estas trayectorias siguen los requerimientos que se establecieron con las flechas direccionales.

Gráfico 4. diagrama de fase



Con esto se ha establecido el diagrama de fase del sistema y su configuración alrededor del punto de equilibrio, en base a la configuración el equilibrio puede caracterizarse de acuerdo a Alpha Chiang (2006:618-620)⁵:

1. *Nodo*: todas las líneas de corriente fluyen en forma no cíclica al punto de equilibrio (nodo estable) o se alejan (nodo inestable). En el diagrama de fase del gráfico anterior se presentaba un nodo estable.

⁵ Para mayor información sobre los distintos puntos de equilibrio y las diferentes trayectorias de fase se puede consultar Shone (2002).

2. Foco: todas las líneas de corriente fluyen en forma cíclica al punto de equilibrio (foco estable) o se alejan (foco inestable).
3. Vórtice: Las líneas de corriente forman círculos concéntricos u óvalos que giran alrededor del equilibrio en un movimiento perpetuo.
4. Punto Silla: es un equilibrio que es estable en algunas direcciones e inestable en otras.

Si bien en este trabajo la atención está puesta en explicar la confección de la configuración del sistema y no profundizamos en los tipos de equilibrio, en el ejemplo recién planteado se observa un nodo estable ya que las líneas de corriente (que se esbozaron cuatro a modo de ejemplo) fluyen en forma no cíclica al punto de equilibrio y en los siguientes dos puntos que se desarrollarán el equilibrio que se plantea es un punto silla.

A continuación se presentarán dos ejemplos en donde se confecciona el diagrama de fase de dos sistemas de ecuaciones diferenciales autónomos.

3. Desarrollo

3.1 Ejemplo numérico

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales autónomo:

$$\dot{x} = 10x + 14y - 100$$

$$\dot{y} = 2x - 2y + 4$$

Lo primero que se plantea es el punto de equilibrio intertemporal y las curvas de demarcación es decir cuando $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$. El punto de equilibrio se obtiene cuando ambas ecuaciones se cumplen simultáneamente.

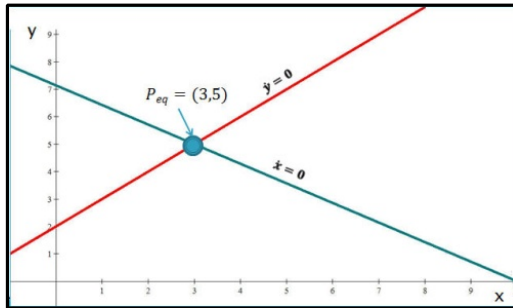
$$\dot{x} = 0 \quad \rightarrow \quad 10x + 14y - 100 = 0$$

$$\dot{y} = 0 \quad \rightarrow \quad x - 2y + 4 = 0$$

Al resolver el sistema se obtiene el punto de equilibrio intertemporal:
 $P_{eq} = (3, 5)$.

Gráficamente el punto de equilibrio y las curvas de demarcación se pueden ver en el Gráfico 5

Gráfico 5: curvas de demarcación y punto de equilibrio



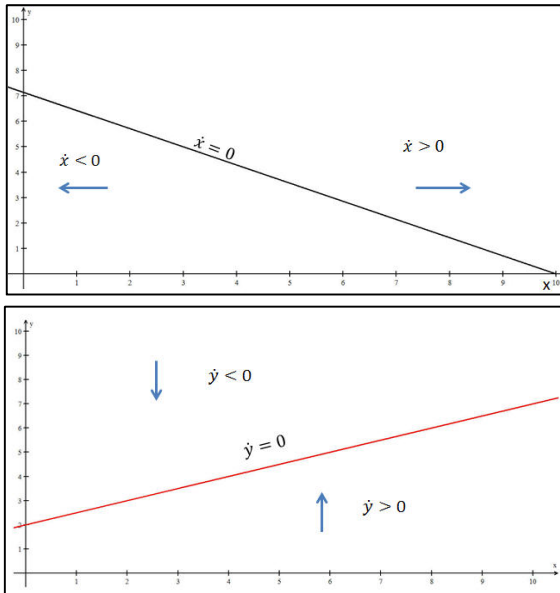
Ahora se analizará siguiendo lo descrito en el punto anterior qué pasa con la variable x a medida que transcurre el tiempo en cualquier punto del plano (excluyendo el punto de equilibrio que como ya se mencionó es el punto en el que ambas variables se mantienen constantes).

Para realizar esto se analiza el signo de $\frac{d\dot{x}}{dx}$:

$$\dot{x} = 0 \rightarrow 10x + 14y - 100 = 0, \text{ por lo tanto: } \frac{d\dot{x}}{dx} = 10 > 0$$

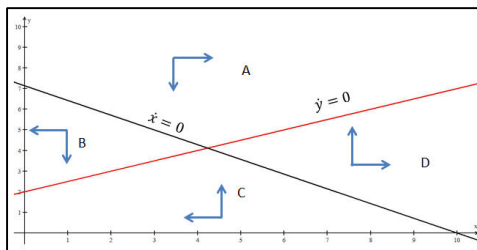
Esto indica que a medida que x aumenta \dot{x} también aumenta. Es decir si nos movemos en el sentido oeste-este (es decir x aumenta) la derivada (\dot{x}) también debe ir aumentando. Por lo tanto debe empezar con valores negativos que van a ir disminuyendo ($\dot{x} < 0$) hasta anularse en la curva de demarcación y luego toma valores positivos que van a ir aumentando a medida que se alejan de la curva de demarcación. En el gráfico 6 se plantea la situación. Para el caso de la variable y se repite el mismo proceso y se obtiene la siguiente configuración que puede verse también en el Gráfico 6.

Gráfico 6. Configuración



Al superponer ambos gráficos se obtiene la configuración del sistema:

Gráfico 7. Configuración del sistema



Se observa que si las condiciones iniciales del sistema ubican a las variables x , y en la zona A, estas variables a medida que transcurra el tiempo modificarán sus valores de acuerdo a las direcciones de las flechas, es decir se moverán disminuyendo el valor de la variable y y aumentando el valor

de la variable x . En cambio en la zona D aumentará el valor de x y de y a medida que transcurre el tiempo. Debe destacarse que las flechas ayudan a mapear el movimiento del sistema de ecuaciones diferenciales pero no se están describiendo las trayectorias exactas que van a seguir ambas variables con este diagrama de fase, pero si sirve para tener una idea cualitativa de la dinámica del modelo. En este caso el equilibrio que se presenta, refiriéndonos a los planteados por el Alpha Chiang que se describieron arriba es un punto silla. A continuación se analiza un modelo económico de optimización de un recurso renovable mediante el uso de diagrama de fase en base al libro de Silberberg (*The Structure of Economics. A Mathematical Analysis*)

3.2 Ejemplo económico: maximización de la utilidad del consumo de un recurso renovable

En el ejemplo desarrollado a continuación se asume que el consumidor tiene la siguiente función de utilidad $U(C(t))$ donde $C(t)$ es una función corriente de consumo de la que se asume que $U' > 0$ y $U'' < 0$ como en el modelo estático. Se considera también que el consumidor es impaciente, es decir que tiene una tasa de preferencia intertemporal. Además se utilizará un recurso renovable (en este caso el recurso es el pez) que dejado solo puede crecer a una determinada tasa y a un máximo tamaño, y si el stock fuera mayor podría balancearse muriendo y así reducir su stock al estado estacionario. Se supone que el crecimiento del recurso depende exclusivamente del stock del mismo y que tiene una curva de crecimiento como la que se expone en el gráfico. El modelo de maximización de la utilidad del consumo puede ser representado de la siguiente manera:

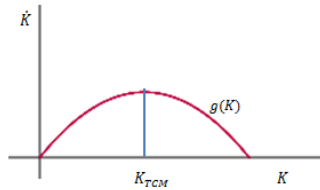
La función a maximizar es: $\int_0^{\infty} U(C)e^{-\rho t} dt$

Sujeto a: $\dot{K} = g(K) - C$ con: $K(0) = K_0$

Donde: $g(K)$: función de crecimiento biológico del recurso ; K : stock de capital; ρ : tasa de preferencia intertemporal del consumidor.

La variable de estado es el stock de capital (K), que representa el stock del recurso renovable y la variable de control es el consumo $C(t)$. Esta ecuación indica que el cambio en el stock del capital es igual a la diferencia entre la tasa de crecimiento $g(K)$ del capital (del recurso renovable) y el consumo del recurso.

Gráfico 8. Curva de crecimiento



Si se analiza el crecimiento del recurso sin considerar extracción del mismo, el stock de capital crece a una tasa dada: $\dot{K} = g(k)$. En un determinado ambiente se llega a un valor de K máximo (en el gráfico es K_{TCM}) donde $g'(K) = 0$ y a partir de allí el K comienza a decrecer. En el gráfico 8 se observa que $g'(k) > 0$ cuando $K < K_{TCM}$ y $g'(k) < 0$ cuando $K > K_{TCM}$. Además $g''(k) < 0$. Por lo tanto si K_{TCM} fuera el stock actual del recurso se podría consumir $\dot{K} = g(K_{TCM})$ por siempre. Esto es plausible para un modelo estático. Sin embargo en un modelo dinámico como el tratado en este ejemplo y dadas las posibilidades de preferencias en el tiempo y el efecto del tamaño del stock del recurso sobre el costo marginal del pez, cambia el punto de vista.

Para resolver el problema se construye el Hamiltoniano a valor presente:

$$H = U(c)e^{-\rho t} + \lambda(t)[g(k) - C]$$

Las condiciones para el óptimo son:

$$i) \frac{\partial H}{\partial c} = U'(c)e^{-\rho t} - \lambda(t) = 0$$

$$ii) \frac{\partial H}{\partial K} = \lambda(t)g'(K) = -\dot{\lambda}(t)$$

Si se toma el $\lambda(t)$ a valor presente se tendría que: $\lambda(t) = m(t)e^{-\rho t}$ (1)

Si se deriva (1) con respecto al tiempo: $\dot{\lambda}(t) = \dot{m}(t)e^{-\rho t} - \rho m(t)e^{-\rho t}$ (2)

Reemplazando (2) en ii) y usando el valor presente de la variable $\lambda(t)$

$$-m(t)e^{-\rho t}g'(K) = \dot{m}(t)e^{-\rho t} - \rho m(t)e^{-\rho t}$$

De donde surge la siguiente ecuación diferencial: $\dot{m} = m\rho - mg'(K)$ que junto con la restricción forma el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dot{K} = g(K) - C \\ \dot{m} = m\rho - mg'(K) \end{cases}$$

El término $g'(K)$ especifica la tasa de crecimiento del stock del recurso esto es el beneficio de esperar o dilatar el consumo en el transcurso del tiempo.

En un modelo no dinámico la maximización de la utilidad requiere la igualdad de este beneficio marginal igual al costo de oportunidad del capital el que en este caso está dado por la tasa de preferencia intertemporal del consumidor ρ . Pero las decisiones en el presente afectan el futuro; los consumos actuales del recurso afectan la tasa de cambio marginal del mismo. Este costo adicional es igual a $-\frac{\dot{m}}{m}$ y debería ser adicionado al costo directo de esperar. (Por cierto, $-\frac{\dot{m}}{m}$ podría ser negativo, compensando de esta manera la tasa de impaciencia).

Volviendo al sistema de ecuaciones diferenciales, se puede decir que no se puede encontrar una solución al modelo sin especificar las funciones $U(C)$ y $g(K)$, sin embargo sí se puede realizar un diagrama de fase y efectuar su análisis.

El diagrama de fase puede ser usado para caracterizar la solución y realizar un análisis comparativo con el estado estático. En este caso el modelo estudiado constituye un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo (t no es argumento separado en la función de utilidad o en la ecuación de estado (restricción) sino que aparece sólo en el factor de descuento, esto hace posible un análisis cualitativo mediante el diagrama de fases).

Desde la condición de máximo i) y usando: $\lambda(t) = m(t)e^{-\rho t}$ es decir que: $m(t) = U'(c)$ y como $U''(c) < 0$ esta es una función monótona y usando una versión global del teorema de la función inversa⁶ podremos escribir $C = g(m)$ ó $C = c(m)$

Observar que: $U'(c) > 0$ y $U''(c) < 0$ y por lo tanto $\exists 1/U'(c)$; Con todo

esto se llega a plantear las dos curvas de demarcación del sistema, es decir

$(\dot{K} = 0, \dot{m} = 0)$:

$$\begin{cases} 0 = g(K) - c(m) \\ 0 = \rho m - mg'(K) \end{cases}$$

Entonces $g'(k) = \rho$ y es distinto de cero por lo tanto debe estar a la izquierda del capital máximo donde $g'(K)=0$ y está a la izquierda del máximo pues a la derecha del capital máximo $g'(K)$ es menor que cero. De ahí que $\dot{m} = 0$ es una línea vertical que corta al eje del capital en el valor ρ .

⁶ Teorema de la función inversa

Sea una función $f: D \rightarrow R^n$, con $D \in R^n$ conjunto abierto y $\bar{x} \in D$ verificando que, $f \in C^1(D)$ y que $|Jf(\bar{x})| \neq 0$. Entonces existen una bola $B(\bar{x}, \delta) \in D$ y una única función $f^{-1}: f(B(\bar{x}, \delta)) \rightarrow B(\bar{x}, \delta)$ tal que:

1. $f^{-1}(\bar{y}) = \bar{x}$ si $f(\bar{x}) = \bar{y} \forall \bar{x} \in B(\bar{x}, \delta)$
2. $f^{-1} \in C^1(f(B(\bar{x}, \delta)))$, y se verifica que $df^{-1}(\bar{y}) = df(\bar{x})^{-1}$

Y, en notación matricial: $Jf^{-1}(\bar{y}) = (Jf(\bar{x}))^{-1}$.

En el caso de que: $f \in C^m(B(\bar{x}, \delta))$, y se verifica que $f^{-1} \in C^m(B(\bar{x}, \delta))$

Nota: Si la función es real de variable real, la condición de existencia de inversa será que la derivada de la función en el punto correspondiente sea distinta de cero.

Mientras que para graficar la otra curva la de $\dot{K} = 0$ se debe tener en cuenta que:

$m = U'(c) > 0$ y $m' = U''(c) < 0$, es decir que la función $C(m)$ es decreciente. Por lo tanto la gráfica de $\dot{K} = 0$ es una curva decreciente.

En el cruce de las dos curvas se presenta el punto de equilibrio (ver el gráfico 9) falta determinar qué sucede con las variables m y K en cada uno de las cuatro zonas que quedaron determinadas en el plano: I, II, III y IV.

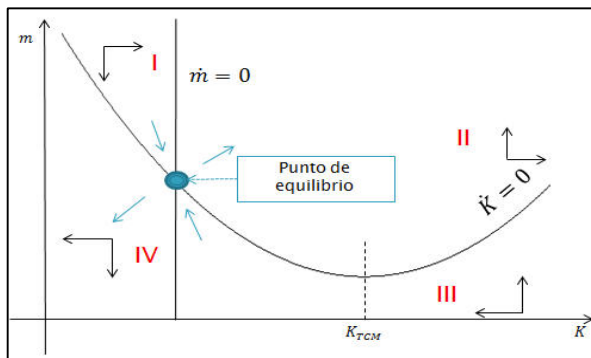
Si se analiza sólo el movimiento de m a la izquierda del capital máximo (K_{TCM}) $\dot{m} < 0$ pues $g'(K)$ es mayor que cero, es decir, en las zonas I y IV: $\dot{m} < 0$. Mientras que a la derecha del capital máximo (K_{TCM}) $\dot{m} > 0$ pues $g'(K)$ es menor que cero, es decir en las zonas II y III: $\dot{m} > 0$.

En los sectores I y II, es decir sobre la curva de demarcación $\dot{K} = 0$ como $c(m)$ es una función decreciente, $\dot{K} > 0$ y en III y IV como $c(m)$ es una función creciente $\dot{K} < 0$.

De esta forma se puede construir para cada sector la configuración correspondiente. En este caso se observa que existe un punto de ensilladura. Simplificadamente, los puntos ubicados en los sectores II y IV se alejan del punto de equilibrio, mientras que en los sectores I y III existe una rama estable, todos los puntos que están ubicados en esta rama se dirigen al equilibrio pero fuera de esta rama estable si bien empiezan acercándose al equilibrio luego terminan alejándose de él⁷. En el gráfico 9 se dibujaron cuatro líneas de corriente de forma de ilustrar esquemáticamente algunas de las trayectorias posibles.

⁷ Para mayor información sobre los distintos tipos de equilibrio intertemporal ver Alpha Chiang (2006, p:618-620)

Gráfico 9. Diagrama de fase



4. Conclusiones

La representación gráfica es un instrumento importante, ya que a partir de esta se puede obtener una perspectiva global del funcionamiento del fenómeno que se está estudiando, al tiempo que resulta de gran ayuda para interpretar la información contenida en las ecuaciones del sistema.

El diagrama de fase permite realizar un análisis cualitativo del problema estudiado sin necesidad de conocer las funciones que forman parte del sistema de ecuaciones diferenciales, permitiendo caracterizar la solución y realizar un análisis comparativo con el estado estático.

Por último, es conocido que el diagrama de fase es muy utilizado en las materias cursadas con posterioridad a matemática para economistas por los estudiantes de la licenciatura en Economía, por lo que es necesario que los mismos puedan utilizar con solvencia esta herramienta en sus actividades futuras ya sean académicas o profesionales.

Referencias bibliográficas

Balbas de la Corte, A.; Gil Fana, A.; Gutiérrez Valdeón S. (1991). *Análisis matemático para la Economía I. Calculo diferencial*. Madrid, España. Editorial AC.

Chiang, A.; Wainwright, K. (2006). *Métodos fundamentales de economía matemática*. 4º ed. México. Mc Graw-Hill.

Jarne Jarne, G.; Minguillón Constante E.; Pérez-Grasa I. (1997). *Matemática para la economía. Álgebra Lineal y Cálculo Diferencial*. Madrid, España. Mc Graw-Hill.

Shone, R. (2002). *Economic Dynamic Phase Diagrams and their Economic Application*. Cambridge 2º ed. UK. Cambridge.

Silberberg, E. (1990). *The Structure of Economics. A Mathematical Analysis*. Singapore. Mc Graw-Hill.

