UNA APLICACIÓN ECONÓMICA DE LOS MÉTODOS DISCRETOS DE OPTIMIZACIÓN DINÁMICA

Alejo Macaya

Resumen

El trabajo aborda la resolución de un problema económico de optimización dinámica (determinación de las trayectorias de consumo y ahorro que maximizan la utilidad del consumidor) en tiempo discreto a partir de diferentes enfoques. Los dos primeros consisten en resolver el problema utilizando técnicas de programación no lineal con un único multiplicador de Lagrange o uno por cada restricción del problema. Este último método permite, además, aplicar técnicas del análisis cualitativo de sistemas dinámicos para describir aproximadamente el comportamiento de las soluciones. El tercer enfoque utiliza el método de “cálculo de variaciones” para resolver el problema. Las aplicaciones de las técnicas de cálculo de variaciones y de programación no lineal con varios multiplicadores de Lagrange implican, a su vez, la necesidad de utilizar técnicas de resolución de ecuaciones en diferencias con condiciones de contorno para hallar la solución explícita del problema. Un cuarto y último método aplicado es el de programación dinámica. Asimismo, se realizan comparaciones entre estos dos últimos métodos para mostrar la equivalencia entre ambos. Finalmente, con el objetivo de exponer el funcionamiento del método de programación dinámica se realiza una nueva aplicación, vinculada a la extracción de tendencia y ciclos de series temporales.

Abstract

This paper addresses the problem of solve an economic model of dynamic optimization (determination of consumption and saving paths that maximize consumer utility) in discrete time using different approaches. Four techniques are used; two related with the method of nonlinear programming (Kuhn-Tucker), other with the "calculus of variations" method (Euler) and, the last, with dynamic programming approach (Bellman). In the first case, from the Kuhn and Tucker techniques, we differentiate between "statics Lagrange multiplier" (as static problem) and "dynamic Lagrange multiplier", two forms of solve the same problem, but they involving different strategies to solve and analyze the problem. Besides, we also use the first order conditions of “dynamic Lagrange multiplier” problem to apply tools of qualitative analysis that allow solve approximately the problem. Finally, with the aim to show an additional application of the dynamic programming method, we solve the problem of extract the cycle and tendency of a time series.

INTRODUCCIÓN

En distintas ramas de Economía (macroeconomía, crecimiento, finanzas), y desde hace algunos años con mayor regularidad, las técnicas de optimización dinámica (cálculo de variaciones, control óptimo, programación dinámica) ocupan un lugar destacado como herramientas de trabajo[1]. Por este motivo, creemos que el conocimiento de las mismas es importante para nuestra formación. Al menos dos características pueden resultar deseables cuando comenzamos a estudiar estos temas. La primera, que el problema pueda tratarse en forma más o menos sencilla, la segunda, que resulte instructivo. Con respecto al primer punto, uno de los caminos más simples es tratar al tiempo como una variable discreta y fijar el horizonte del problema, en tanto que un problema de consumo y ahorro, que se presenta con bastante frecuencia en las aplicaciones, puede resultar instructivo.

Esta nota tiene como objetivo abordar un problema de consumo y ahorro intertemporal a partir de diferentes enfoques o caminos posibles de resolución. Concretamente, el problema consiste en conocer cuál será la secuencia de consumo y ahorro de un agente que desea maximizar la utilidad sujeta a ciertas restricciones de presupuesto y procesos exógenos para el ingreso y la tasa de interés.

En los casos en que el tiempo es una variable discreta y el horizonte es finito se pueden aplicar las técnicas de optimización estática (por ejemplo, bajo ciertos supuestos, las condiciones de Kuhn-Tucker caracterizan el punto crítico) para resolver el problema, puesto que su dimensión es finita. El tratamiento del problema requiere también, aunque no necesariamente, algún conocimiento de ecuaciones en diferencias finitas de primer y segundo orden. El punto central para aplicar uno u otro enfoque depende, principalmente, de cómo se trabaje con las restricciones. Si las restricciones se "agregan" la solución puede obtenerse a partir de un sistema de ecuaciones, en cambio si las ecuaciones de movimiento se sustituyen en la función objetivo la solución se encuentra a partir de una ecuación en diferencias de segundo orden, mientras que si se utilizan tantos multiplicadores como restricciones existen la solución surge después de resolver un sistema de ecuaciones en diferencias de

[1] Entre mediados de 1920 y principios de 1930 aparecen los primeros trabajos que aplican la técnica de cálculo de variaciones para resolver problemas económicos dinámicos [Evans, 1924; Ramsey, 1928; Hotelling, 1931]. Tal vez, los dos últimos trabajos (especialmente el primero de estos) hayan sido los de mayor repercusión.

primer orden. Otra posibilidad es descomponer el problema en etapas y comenzar a resolverlo de adelante hacia atrás.

El problema con el que vamos a trabajar se encuentra tratado de diferentes formas y con distintos supuestos en Obstfeld y Rogoff [1996, pp. 715-721], Sargent [1987, pp. 22-24], Stokey y Lucas [1989, pp. 126-127] y Varian [1992, pp. 421-426], entre otros. Una vez conocida la solución (hallado el sendero temporal para el consumo y los activos que hacen máxima la utilidad), el ejemplo puede explotarse también para encontrar expresiones más simples de la solución si asumimos cierto comportamiento en el tiempo del ingreso o, sin conocer la solución, analizar el comportamiento de las variables mediante un diagrama de fases. Además, estudiamos el problema de horizonte infinito, otras formas de presentar la solución en términos de la riqueza y la obtención del valor máximo que alcanza la utilidad (función valor).

La sección siguiente, que contiene el modelo de consumo y ahorro, corresponde a la parte principal del trabajo. Incluimos una tercera sección con otra aplicación de la técnica de programación dinámica para la extracción de ciclos y tendencias de series temporales.

1. CONSUMO Y AHORRO ÓPTIMO BAJO CERTIDUMBRE

Consideremos el siguiente problema de un agente representativo:

$$\underset{\{c_t, b_{t+1}\}_{t=0}^{T}}{\text{Max}} \sum_{t=0}^{T} \beta^t \cdot \mathrm{u}(c_t), \qquad \beta \equiv (1+\rho)^{-1}, \ \rho > 0$$

$$\text{s.a:} \begin{cases} b_{t+1} = (1+r)\cdot(y_t + b_t - c_t) & t = 0,1,2, \ \dots, T \\ b_0 \text{ dado} \end{cases}$$

Donde b_t es la cantidad de activos al inicio del período t mientras c_t e y_t denotan el consumo y el ingreso del período t, respectivamente. Todas estas variables se miden en unidades del bien de consumo. La tasa de interés se denota por r. La función de utilidad, $\mathrm{u}(c)$, depende del consumo, es continuamente diferenciable, estrictamente creciente y estrictamente cóncava, con

$\lim_{c\to 0} \ u'(c)=\infty$. La utilidad futura se descuenta por un factor β, siendo ρ la tasa de preferencia temporal o tasa de impaciencia. La restricción de presupuesto indica que los activos a comienzos del período $t+1$ son iguales al ahorro bruto del período anterior, $(y_t + b_t - c_t)$, capitalizado durante un período.

En el período inicial el consumidor debe determinar su plan de consumo, $\{c_t\}_{t=0}^{T}$, y acumulación de activos, $\{b_{t+1}\}_{t=0}^{T}$, dada la restricción de presupuesto de cada período, conocidas las secuencias de ingreso laboral, $\{y_t\}_{t=0}^{T}$ (que asumimos fuera de control del agente) y tipo de interés, $\{r\}_{t=0}^{T}$ (que suponemos constante en el tiempo) y dada una cantidad inicial de activos b_0. Un sendero con estas características se denomina de previsión perfecta.

2. SOLUCIÓN POR PROGRAMACIÓN NO LINEAL

El problema puede plantearse en diferentes formas como un problema de programación no lineal.

2.1 Multiplicadores de Lagrange "estáticos"

En esta versión utilizamos un multiplicador de Lagrange (o, a lo sumo, dos) para obtener las condiciones de primer orden. Pese a la existencia de un número inicial de $(T+1)$ restricciones, la agregación de éstas se logra gracias a que los activos vinculan ecuaciones de movimiento de períodos consecutivos.

2.1.1 Horizonte de tiempo finito

El problema anterior se puede escribir como un problema con una "estructura estática" si en lugar de utilizar como restricción la ecuación de movimiento para cada período empleamos una restricción "agregada" en el tiempo. La restricción de presupuesto es una ecuación en diferencias de primer orden en el nivel de activos donde consideramos el consumo y el ingreso como funciones desconocidas del tiempo:

$$b_{t+1} - b_t - r \cdot b_t = (1+r) \cdot (y_t - c_t)$$

Integrando entre $t = 0$ y $t = T$ obtenemos:

$$b_0 = \frac{b_{T+1}}{(1+r)^{T+1}} - \sum_{t=0}^{T} \left(\frac{1}{1+r} \right)^t \cdot (y_t - c_t),$$

donde b_{T+1} es la cantidad de activos o pasivos que deja el consumidor al finalizar su vida. Nótese, sin embargo, que si el consumidor muere a fines de T los prestamistas nunca estarán dispuestos a prestarle en el último período (T). Por lo tanto, $b_{T+1} \geq 0$.

La relación anterior puede volverse a expresar de la siguiente manera:

$$b_0 + \sum_{t=0}^{T} \left(\frac{1}{1+r} \right)^t \cdot y_t - \frac{b_{T+1}}{(1+r)^{T+1}} - \sum_{t=0}^{T} \left(\frac{1}{1+r} \right)^t \cdot c_t = 0$$

El problema original puede entonces plantearse como:

$$\underset{\{c_t\}_{t=0}^{T},\, b_{T+1}}{\text{Max}} \sum_{t=0}^{T} \beta^t \cdot \text{u}(c_t)$$

$$\text{s.a:} \begin{cases} b_0 + \sum_{t=0}^{T} \left(\frac{1}{1+r} \right)^t \cdot y_t - \frac{b_{T+1}}{(1+r)^{T+1}} - \sum_{t=0}^{T} \left(\frac{1}{1+r} \right)^t \cdot c_t = 0 \\ b_{T+1} \geq 0 \end{cases}$$

Definimos la riqueza del consumidor en el período inicial como el valor de los activos iniciales más el valor presente de la corriente futura de ingresos, es decir:

$W_0 \equiv b_0 + y_0 + \sum_{t=1}^{T} \left(\frac{1}{1+r} \right)^t \cdot y_t$. Utilizando esta definición de riqueza formamos ahora la función de Lagrange:

$$\underset{\{c_t\}_{t=0}^{T},\, b_{T+1}}{\text{Max}} \quad \sum_{t=0}^{T} \beta^t \cdot \text{u}(c_t) + \mu \cdot \left[W_0 - \frac{b_{T+1}}{(1+r)^{T+1}} - c_0 - \sum_{t=1}^{T} \left(\frac{1}{1+r} \right)^t \cdot c_t \right]$$

La condición de primer orden (CPO) del problema es:

$$c_0: \qquad \text{u}'(c_0) - \mu = 0$$

$$c_1: \quad \beta \cdot \text{u}'(c_1) - \mu \cdot \left(\frac{1}{1+r} \right) = 0$$

$$c_T: \quad \beta^T \cdot \text{u}'(c_T) - \mu \cdot \left(\frac{1}{1+r} \right)^T = 0$$

$$b_{T+1}: \quad \mu \cdot \frac{-1}{(1+r)^{T+1}} \leq 0$$

$$\mu: \quad W_0 - \frac{b_{T+1}}{(1+r)^{T+1}} - c_0 - \sum_{t=1}^{T} \left(\frac{1}{1+r} \right)^t \cdot c_t = 0$$

La condición de holgura complementaria es:

$$b_{T+1}: \quad -\mu \cdot \frac{b_{T+1}}{(1+r)^{T+1}} = 0$$

La función de utilidad es estrictamente creciente, por lo tanto $\mu = \text{u}'(c_0) > 0$. Si el multiplicador es superior a cero entonces la condición de holgura complementaria implica $b_{T+1} = 0$ (en el último período el agente consume todos sus activos).

Por otro lado, notemos que a partir de la CPO podemos despejar en cada ecuación el consumo como función del multiplicador. Para el caso de la función de utilidad $u(c) = \ln c$ estas ecuaciones se transforman en:

$$c_0 = 1/\mu$$

$$c_1 = \left[\beta \cdot (1+r)\right]/\mu$$

$$c_2 = \left[\beta^2 \cdot (1+r)^2\right]/\mu$$

$$c_t = \left[\beta^t \cdot (1+r)^t\right]/\mu$$

$$c_T = \left[\beta^T \cdot (1+r)^T\right]/\mu$$

Este conjunto de ecuaciones y la restricción se pueden escribir como un sistema de ecuaciones lineales con $(T+2)$ incógnitas y $(T+2)$ ecuaciones. En lugar de formar el sistema, reemplacemos el consumo de cada período en la restricción de presupuesto agregada:

$$W_0 - \frac{1}{\mu} \cdot \sum_{t=0}^{T} \beta^t = 0 ,$$

resulta el valor del multiplicador:

$$\mu = \left(\frac{1-\beta^{T+1}}{1-\beta} \right) \cdot \frac{1}{W_0}$$

El consumo de cada período es entonces igual a:

$$c_0 = \left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}} \right) \cdot W_0$$

$$c_1 = \beta \cdot (1+r) \cdot \left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}} \right) \cdot W_0$$

$$c_2 = \beta^2 \cdot (1+r)^2 \cdot \left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}} \right) \cdot W_0$$

$$\vdots$$

$$c_t = \beta^t \cdot (1+r)^t \cdot \left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}} \right) \cdot W_0$$

$$\vdots$$

$$c_T = \beta^T \cdot (1+r)^T \cdot \left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}} \right) \cdot W_0$$

Por lo tanto, el consumo es una función que depende del tipo de interés, del factor de descuento intertemporal y (linealmente) de la riqueza inicial.

La función de acumulación de activos, b_t , la podemos obtener a partir de la función de consumo hallada. Integrando la restricción de presupuesto intertemporal entre 0 y t y utilizando la condición inicial obtenemos:

$$b_t = b_0 \cdot (1+r)^t + \sum_{s=0}^{t-1} (1+r)^{t-s} \cdot (y_s - c_s),$$

reemplazando, de acuerdo con el resultado obtenido, c_s por $\beta^s \cdot (1+r)^s \cdot \left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}} \right) \cdot W_0$ y volviendo a ordenar términos resulta la trayectoria temporal de los activos:

$$b_t = (1+r)^t \cdot \left[b_0 - \left(\frac{1-\beta^t}{1-\beta^{T+1}} \right) \cdot W_0 \right] + \sum_{s=0}^{t-1} (1+r)^{t-s} \cdot y_s$$

Finalmente, para asegurar que el punto hallado sea un máximo del problema debemos verificar las condiciones de segundo orden. En este caso, dado que la función objetivo es estrictamente cóncava (es una combinación lineal de funciones estrictamente cóncavas) y la restricción es convexa[2], estas condiciones son suficientes para asegurar que el punto encontrado es un máximo global [Sydsaeter y Hammond, pp. 558-59, 1996].

Aquí termina la solución del problema de horizonte de tiempo finito. En muchas ocasiones, por razones de menor complejidad en los cálculos (entre otras), se trabaja con problemas de horizonte infinito.

2.1.2 Horizonte de tiempo infinito

Las expresiones antes obtenidas se "simplifican" si consideramos que el horizonte de tiempo es infinito, $T \to \infty$. En este caso, para que la región factible de consumo esté acotada es necesario asumir que el valor presente del ingreso sea

[2] La restricción de presupuesto se puede escribir $\sum_{t=0}^{T} \left(\frac{1}{1+r} \right)^t \cdot c_t - W_0 = -\frac{b_{T+1}}{(1+r)^{T+1}} \leq 0$. Esta restricción, cuyas variables son el consumo de cada período, es lineal y, por lo tanto, convexa (las restricciones de no negatividad del consumo, $c_t \geq 0$, son también convexas).

acotado (en el largo plazo el ingreso no puede crecer a una tasa superior a la tasa de interés), de esta manera la riqueza del agente es finita. Además,

observando la restricción de presupuesto agregada, también debemos exigir, para que el consumo no sea tan elevado como el agente quiera, que en el largo plazo se satisfaga:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{b_{T+1}}{(1+r)^{T+1}} = 0$$

Este límite es conocido como "condición de transversalidad" (o ausencia de juegos de Ponzi), es equivalente a la condición de holgura complementaria para el problema de horizonte finito. Dicha restricción indica que en el largo plazo los activos o pasivos no pueden crecer a una tasa superior al tipo de interés. La restricción agregada del agente resulta ser entonces:

$$\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^t \cdot c_t = b_0 + \sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^t \cdot y_t$$

La función consumo, cualquiera sea el período de tiempo, es igual a:

$$c_t = \beta^t \cdot (1+r)^t \cdot (1-\beta) \cdot W_0 \,,$$

donde $W_0 \equiv b_0 + y_0 + \sum_{t=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^t \cdot y_t$,

y la acumulación de activos:

$$b_t = (1+r)^t \cdot \left[b_0 - \left(1-\beta^t\right) \cdot W_0 \right] + \sum_{s=0}^{t-1}(1+r)^{t-s} \cdot y_s \,,$$

que también puede expresarse como:

$$b_t = \beta^t \cdot (1+r)^t \cdot W_0 - \sum_{s=t}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{s-t} \cdot y_s$$

En algunos casos la solución, en lugar de hacer referencia a la riqueza inicial, puede encontrarse expresada en términos de la riqueza del período corriente.

2.1.3 Expresión de la solución en términos de la riqueza corriente

Vamos a explorar ahora cómo podemos expresar la solución pero en términos de la riqueza de cada período W_t en lugar de la riqueza del período inicial W_0. Entendemos por riqueza del período t a la suma de los activos iniciales de ese período más el valor presente de la corriente futura de ingreso esperado a partir de ese período inclusive. Es decir:

$$W_t \equiv b_t + y_t + \sum_{s=t+1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^{s-t} \cdot y_s$$

Desplazándola un período hacia delante, la riqueza posee la siguiente estructura recursiva:

$$W_{t+1} \equiv b_{t+1} + y_{t+1} + \sum_{s=t+2}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^{s-t-1} \cdot y_s \ ,$$

sustituyendo b_{t+1} por $(1+r) \cdot (y_t + b_t - c_t)$ y ordenando términos,

$$W_{t+1} \equiv (1+r) \cdot \left[b_t + y_t + \sum_{s=t+1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^{s-t} \cdot y_s \right] - (1+r) \cdot c_t \ ,$$

el término entre corchetes es W_t, por lo tanto:

$$W_{t+1} \equiv (1+r) \cdot (W_t - c_t)$$

Integrando esta ecuación en diferencias entre 0 y t obtenemos:

$$W_t = (1+r)^t \cdot W_0 - \sum_{s=0}^{t-1} (1+r)^{t-s} \cdot c_s \ ,$$

y reemplazando el consumo por las funciones antes encontradas (en el problema de horizonte infinito) resulta:

$$W_t = \beta^t \cdot (1+r)^t \cdot W_0$$

Por lo tanto, la función consumo se puede escribir como una función de la riqueza del período corriente:

$$c_t = (1-\beta) \cdot W_t \ (t = 0, 1, 2, \ \ldots)$$

O en forma equivalente:

$$c_t = (1-\beta) \cdot \left[b_t + y_t + \sum_{s=t+1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^{s-t} \cdot y_s \right]$$

El agente consume en cada período una fracción $(1-\beta)$ de la riqueza del período. El factor $(1-\beta)$ puede interpretarse como la propensión marginal a consumir de la riqueza.

En el apéndice mostramos cómo se modifican estas fórmulas para el problema de horizonte finito.

2.1.4 La función de utilidad indirecta o función valor

Reemplazando el consumo de cada período en la función de utilidad resulta la utilidad indirecta o función valor:

$$\mathrm{v}(W_0) = \frac{\ln(1-\beta)}{1-\beta} + \frac{\beta}{(1-\beta)^2} \cdot \ln \beta + \frac{\beta}{(1-\beta)^2} \cdot \ln(1+r) + \frac{1}{1-\beta} \cdot \ln W_0$$

Nótese que esta función depende de variables exógenas y la riqueza inicial. La función valor posee un papel fundamental en el enfoque de programación dinámica.

2.2 Multiplicadores de Lagrange "dinámicos"

2.2.1 El problema

Si utilizamos un multiplicador de Lagrange para cada una de las restricciones el problema puede expresarse de la forma siguiente:

$$\underset{\{c_t, b_{t+1}, \lambda_t\}_{t=0}^{T}}{\text{Max}} \sum_{t=0}^{T} \left\{ \beta^t \cdot \mathrm{u}(c_t) + \lambda_t \cdot \left[(1+r) \cdot (y_t + b_t - c_t) - b_{t+1} \right] \right\}$$

$$\text{s.a:} \begin{cases} b_0 \text{ dado} \\ b_{T+1} \geq 0 \end{cases}$$

La CPO orden es:

$$c_t : \beta^t \cdot \mathrm{u}'(c_t) - \lambda_t \cdot (1+r) = 0 \; (t = 0,1,2, \ldots, T)$$

$$\lambda_t : (1+r) \cdot (y_t + b_t - c_t) - b_{t+1} = 0 \; (t = 0,1,2, \ldots, T)$$

$$b_{t+1} : \lambda_{t+1} \cdot (1+r) - \lambda_t = 0 \; (t = 0,1,2, \ldots, T-1)$$

$$b_{T+1} : -\lambda_T \leq 0$$

Más la condición de holgura complementaria:

$$-\lambda_T \cdot b_{T+1} = 0$$

Utilizando la primera y tercera ecuación resulta:

$$\beta \cdot (1+r) \cdot \mathrm{u}'(c_{t+1}) = \mathrm{u}'(c_t)$$

Esta ecuación se puede interpretar como una “condición de arbitraje” del consumo en el tiempo: el agente estará indiferente entre demandar una unidad menos hoy y $(1+r)$ unidades adicionales mañana (el rendimiento de esa unidad

ahorrada) siempre que la desutilidad marginal corriente, $\mathrm{u}'(c_t)$, sea igual a la utilidad marginal de esas unidades adicionales mañana, $(1+r)\cdot\mathrm{u}'(c_{t+1})$, en términos de utilidad presente, $\beta\cdot(1+r)\cdot\mathrm{u}'(c_{t+1})$.

Luego, las tres primeras ecuaciones se pueden volver a escribir como:

$$\beta\cdot(1+r)\cdot\mathrm{u}'(c_{t+1})=\mathrm{u}'(c_t)$$

$$(1+r)\cdot(y_t+b_t-c_t)-b_{t+1}=0\ (t=0,1,2,\ \ldots,T-1)$$

Este es un sistema de ecuaciones en diferencias de primer orden en el consumo y los activos. Vamos a suponer que el horizonte de tiempo es infinito. Una solución particular del sistema se obtiene estableciendo condiciones de contorno. La primera de estas proviene de la condición inicial del problema, b_0. La segunda se obtiene a partir de fijar una condición “terminal” o de transversalidad. La tercera ecuación, que es una ecuación en diferencias en los multiplicadores, se puede integrar y resulta: $\lambda_t=\lambda_0\cdot(1+r)^{-t}$, reemplazando ahora λ_T en la condición de holgura complementaria y aplicando límite obtenemos nuevamente la condición de transversalidad:

$$\lambda_0\cdot\lim_{T\to\infty}\frac{b_{T+1}}{(1+r)^T}=0$$

Como ejemplo particular, para hallar una solución explícita del modelo, vamos a suponer la misma función de utilidad que antes, $\mathrm{u}(c)=\ln c$. El problema que resulta es el siguiente:

$$\begin{cases} \beta \cdot (1+r) \cdot c_t = c_{t+1} \\ (1+r) \cdot (y_t + b_t - c_t) - b_{t+1} = 0 \\ b_0 \text{ dado} \\ \lim_{T \to \infty} \dfrac{b_{T+1}}{(1+r)^T} = 0 \end{cases}$$

En la primera ecuación el consumo se encuentra aislado del nivel de activos. Integrando entre el período inicial t y un período cualquiera $s > t$ obtenemos:

$$c_s = \beta^{s-t} \cdot (1+r)^{s-t} \cdot c_t$$

Integrando ahora la segunda ecuación entre t y T, pasando al límite cuando $T \to \infty$ y utilizando la segunda condición de contorno:

$$b_t + y_t + \sum_{s=t+1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^{s-t} \cdot y_s = c_t + \sum_{s=t+1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^{s-t} \cdot c_s$$

Reemplazando la primera solución en la segunda, simplificando términos, despejando c_t reordenando términos obtenemos la función de consumo antes hallada:

$$c_t = (1-\beta) \cdot \left[b_t + y_t + \sum_{s=t+1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^{s-t} \cdot y_s \right]$$

2.2.2 Diagrama de fases para horizonte finito

La primera figura, abajo, muestra el diagrama de fases correspondiente al consumo y los activos para el problema de horizonte finito, donde el ingreso es

constante y suponemos $\beta\cdot(1+r)>1$ (el sendero de consumo es creciente). La información que utilizamos para su construcción es la siguiente:

Partimos del sistema determinado por la CPO:

$$\begin{cases} c_{t+1}-c_t=\left[\beta\cdot(1+r)-1\right]\cdot c_t \\ b_{t+1}-b_t=-(1+r)\cdot c_t+r\cdot b_t+(1+r)\cdot y \end{cases}$$

Las líneas de demarcación se obtienen haciendo Δc_t y Δb_t igual a cero. En tal caso surgen las siguientes relaciones:

$$c_t\big|_{\Delta c_t=0}=0$$

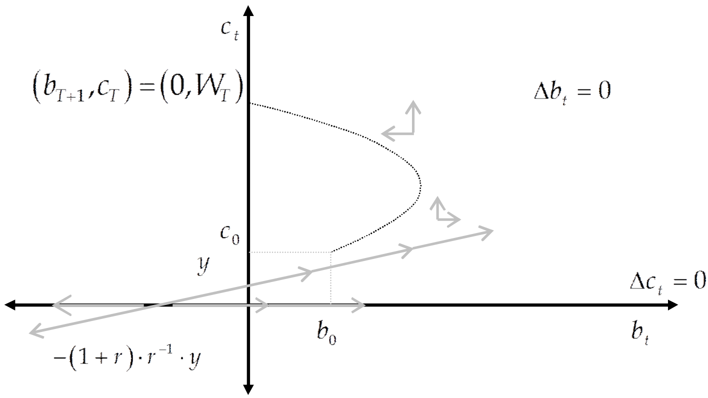
$$c_t\big|_{\Delta b_t=0}=r\cdot(1+r)^{-1}\cdot b_t+y$$

La primera es una recta superpuesta al eje de abscisas mientras la segunda es otra recta (pero con pendiente inferior a la unidad) de ordenada al origen igual a y y que corta al eje de abscisas en $-(1+r)\cdot r^{-1}\cdot y$. Luego, los autovectores $\mathbf{v}_1=(1\quad 0)'$ y $\mathbf{v}_2=(1\quad 1-\beta)'$ indican las direcciones de movimiento donde la relación entre el consumo y los activos es lineal. El primer autovector es horizontal (tal como indican las líneas de flechas) y el segundo posee pendiente $(1-\beta)$ que dada la hipótesis $\beta\cdot(1+r)>1$ implica que se encuentra por debajo de la recta de demarcación $\Delta b_t=0$. Para un valor de b_0 (>0, por ejemplo) a partir de la función consumo obtenemos c_0:

$$c_0 = \left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}} \right) \cdot \left[b_0 + \left(1 - \frac{1}{(1+r)^{T+1}} \right) \cdot \left(\frac{1+r}{r} \right) \cdot y \right]$$

Se puede demostrar que c_0 se encuentra por arriba de la recta determinada por el segundo autovector (véase el apéndice). Si asumimos que c parte por debajo de la línea de demarcación de b_t, entonces inicialmente el consumo y los activos aumentan hasta $\Delta b_t = 0$ y luego los activos comienzan a disminuir mientras el consumo sigue creciendo. En el instante final se alcanza $b_t = 0$.

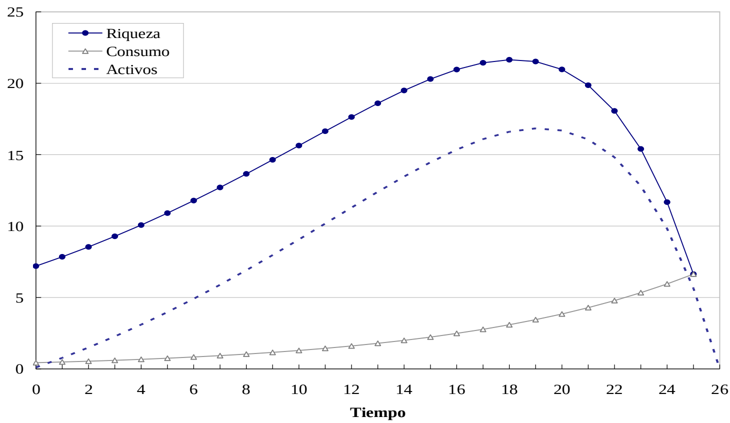
Figura 1. Consumo y acumulación de activos. Supuestos: $u = \ln(c)$, $y_t \equiv y$, $\beta \cdot (1+r) > 1$ y T finito



En la figura 2 simulamos el comportamiento de los activos, del consumo y la riqueza para un nivel de ingreso constante a lo largo de 25 períodos, una tasa de interés de 16% y una tasa de impaciencia de 4%. El consumidor parte con un nivel de activos positivo. La tasa de interés relativamente alta con respecto a la de impaciencia es un fuerte incentivo para ahorrar: los activos crecen más rápido que el consumo y la riqueza también aumenta. Luego, debido a que la corriente futura de ingreso disminuye cuando nos acercamos al período final, la riqueza comienza a descender de la misma manera que lo hacen los activos. El consumo, sin embargo, sigue creciendo sostenido por la disminución de la tenencia de activos. Nótese que en el último período se consume la riqueza remanente.

Figura 2. Trayectoria de la riqueza, activos y consumo

Supuestos: $y \equiv 1$, $r = 16\%$, $\rho = 4\%$, $T = 25$, $b_0 = 0{,}1$.



2.2.3 Un proceso particular para el ingreso

Como caso particular supongamos que el ingreso sigue un proceso autorregresivo de primer orden, $y_s = \lambda \cdot y_{s-1}$, con $\lambda > 0$, entonces:

$$c_t = (1-\beta)\cdot\left[b_t + \left(\frac{1+r}{1+r-\lambda}\right)\cdot y_t\right],$$

siempre que $\lambda \cdot (1+r)^{-1} < 1$. El consumo depende del ingreso corriente, responde positivamente al aumento de la tasa de crecimiento del ingreso y negativamente al crecimiento del tipo de interés.

3. SOLUCIÓN POR "CÁLCULO DE VARIACIONES"

Si sustituimos la restricción presupuestaria en la función de utilidad llegamos al problema siguiente:

$$\underset{\{b_{t+1}\}_{t=0}^{T}}{\text{Max}} \sum_{t=0}^{T} \beta^t \cdot \mathrm{u}\left(y_t + \frac{r \cdot b_t - \Delta b_t}{1+r} \right)$$

$$\text{s.a: } \begin{cases} b_0 \text{ dado} \\ b_{T+1} \geq 0 \end{cases}$$

La CPO se obtienen derivando con respecto a b_{s+1}:

$$-\frac{\beta^s}{1+r} \cdot \mathrm{u}'\left(y_s + \frac{r \cdot b_s - b_{s+1} + b_s}{1+r} \right) + \beta^{s+1} \cdot \mathrm{u}'\left(y_{s+1} + \frac{r \cdot b_{s+1} - b_{s+2} + b_{s+1}}{1+r} \right) = 0\,,$$
$$(t = 0, 1, 2, \ \ldots, T-1)$$

$$-\beta^T \cdot \mathrm{u}'\left(y_T + \frac{r \cdot b_T - b_{T+1} + b_T}{1+r} \right) \cdot \frac{1}{1+r} \leq 0 \ (t = T)$$

La condición de holgura complementaria es:

$$-\beta^T \cdot \mathrm{u}'(c_T) \cdot \frac{b_{T+1}}{1+r} = 0$$

Si T es finito, esta última ecuación y el supuesto de utilidad estrictamente creciente implican $b_{T+1} = 0$.

Analicemos ahora el problema de horizonte infinito. La primera ecuación implica $\beta^t \cdot (1+r)^t \cdot \mathrm{u}'(c_t) = \mathrm{u}'(c_0)$. Reemplazando en la anterior y tomando límite resulta la condición de transversalidad[3]:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{b_{T+1}}{(1+r)^{T+1}} = 0$$

Pasemos a resolver la ecuación en diferencias de segundo orden que obtuvimos inicialmente[4]. Las condiciones de contorno son las mismas que antes.

Si suponemos la misma función de utilidad que en los casos anteriores resulta la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$b_{s+2} - (1+r)\cdot(1+\beta)\cdot b_{s+1} + \beta\cdot(1+r)^2 \cdot b_s = (1+r)\cdot y_{s+1} - \beta\cdot(1+r)^2 \cdot y_s$$

Las raíces características son: $\lambda_1 = 1+r > 1$ y $\lambda_2 = (1+r)\cdot\beta$. Esta ecuación en diferencias puede resolverse a partir del método de variación de las constantes [Aiub, pp. 201-202, 1985], aunque hay otros métodos disponibles [Blanchard y Fischer, pp. 261-266, 1989]. Dados los valores de las raíces y las condiciones de contorno, para que la solución de la ecuación completa sea acotada es necesario emplear la mayor raíz para integrar los valores futuros de la variable cuyo comportamiento es exógeno. La solución general puede representarse en la forma siguiente:

$$b_t = m_1 \cdot (1+r)^t + m_2 \cdot \beta^t \cdot (1+r)^t + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \left[\sum_{s=t}^{T-1} (\lambda_1)^{-(s-t+1)} \cdot \mathrm{f}_s + \sum_{s=0}^{t-1} (\lambda_2)^{-(s-t+1)} \cdot \mathrm{f}_s \right]$$

---

[3] Una prueba formal de esta condición puede encontrarse en Stokey y Lucas [1989, pp. 98-99].
[4] Nótese que esta ecuación posee el mismo orden que la ecuación de Euler de cálculo de variaciones.

Donde m_1 y m_2 son dos constantes que se determinan a partir de las condiciones de contorno en tanto $\mathrm{f}_s \equiv (1+r)\cdot y_{s+1} - \beta\cdot(1+r)^2\cdot y_s$. Las sumas entre corchetes son iguales a:

$$\sum_{s=t}^{T-1}(\lambda_1)^{-(s-t)}\cdot\left[y_{s+1}-\beta\cdot(1+r)\cdot y_s\right]=-\beta\cdot(1+r)\cdot y_t+(1-\beta)\sum_{s=t+1}^{T-1}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{s-t-1}\cdot y_s+\left(\frac{1}{1+r}\right)^{T-t-1}\cdot y_T$$

Y,

$$\sum_{s=0}^{t-1}\left[\beta\cdot(1+r)\right]^{-(s-t+1)}\cdot(1+r)\cdot\left[y_{s+1}-\beta\cdot(1+r)\cdot y_s\right]=(1+r)\cdot\left[y_t-\beta^t\cdot(1+r)^t\cdot y_0\right],$$

reemplazando en la solución y ordenando términos obtenemos:

$$b_t=m_1\cdot(1+r)^t+m_2\cdot\beta^t\cdot(1+r)^t-\sum_{s=t}^{T-1}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{s-t}\cdot y_s-\left(\frac{1}{1+r}\right)^{T-t}\cdot\frac{y_T}{1-\beta}+\frac{\beta^t\cdot(1+r)^t}{1-\beta}\cdot y_0$$

Supongamos que para determinar las constantes fijamos dos condiciones de contorno, b_0 y b_{T+1}. Una vez encontrados los valores de éstas evaluamos las mismas para $T\to\infty$. Efectuando estas operaciones obtenemos:

$$\lim_{T\to\infty} m_1=\lim_{T\to\infty}\frac{b_{T+1}}{(1+r)^{T+1}}+\lim_{T\to\infty}\frac{y_T}{(1-\beta)\cdot(1+r)^T}$$

$$\lim_{T\to\infty} m_2=b_0+\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^s\cdot y_s-\frac{1}{1-\beta}\cdot y_0-\lim_{T\to\infty}\frac{b_{T+1}}{(1+r)^{T+1}}$$

El supuesto acerca de la tasa de crecimiento del ingreso y la condición de transversalidad implican:

$$\lim_{T\to\infty} m_1=0$$

$$\lim_{T\to\infty} m_2 = b_0 + \sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{s}\cdot y_s - \frac{1}{1-\beta}\cdot y_0$$

Sustituyendo las constantes en la solución resulta:

$$b_t = \beta^t\cdot(1+r)^t\cdot\left[b_0 + \sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{s}\cdot y_s\right] - \sum_{s=t}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{s-t}\cdot y_s\ ,$$

que también se puede expresar como:

$$b_t = \beta^t\cdot(1+r)^t\cdot W_0 - \sum_{s=t}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{s-t}\cdot y_s\ ,$$

La función consumo se obtiene reemplazando la expresión recién encontrada en $c_t = y_t + (1+r)^{-1}\cdot(r\cdot b_t - \Delta b_t)$. Operando de esta forma obtenemos:

$$c_t = \beta^t\cdot(1+r)^t\cdot(1-\beta)\cdot W_0$$

$$W_0 \equiv b_0 + \sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{s}\cdot y_s$$

4. SOLUCIÓN POR PROGRAMACIÓN DINÁMICA

4.1 Introducción al método

Para introducir el método de programación dinámica vamos a mostrar cómo se puede escribir el problema en etapas. La función de utilidad es la misma que en los ejemplos anteriores. El planteo del problema es el siguiente:

$$\underset{\{c_t\,,\,W_{t+1}\}_{t=0}^{T}}{\text{Max}}\quad \mathrm{u}(c_0)+\beta\cdot\mathrm{u}(c_1)+\beta^2\cdot\mathrm{u}(c_2)+\ \ldots+\beta^{T-1}\cdot\mathrm{u}(c_{T-1})+\beta^T\cdot\mathrm{u}(c_T)$$

$$\text{s.a: } \begin{cases} W_{t+1} = (1+r)\cdot(W_t - c_t) \\ W_0 > 0 \\ W_{T+1} \geq 0 \end{cases}$$

Para simplificar los cálculos ahora interpretamos W_t como el stock de activos del período t .

En el último período el problema del consumidor consiste en elegir su nivel de consumo para ese período y el nivel de activos que desearía dejar tras terminar su vida:

$$\underset{c_T\,,\,W_{T+1}}{\text{Max}} \quad \text{u}(c_T)$$

$$\text{s.a: } W_{T+1} = (1+r)\cdot(W_T - c_T)$$

El nivel de consumo que maximiza la utilidad es elegir (recordemos que $W_{T+1} \geq 0$):

$$c_T = W_T$$

$$W_{T+1} = 0$$

La utilidad derivada del nivel de activos del último período, $\text{v}_T(W_T)$, es igual a:

$$\text{v}_T(W_T) \equiv \text{u}(W_T) = \ln(W_T)$$

Esta es la función valor del período final. Nótese que desde el punto de vista del último período, T , W_T viene dado del período $T-1$. Resuelto entonces el problema del consumidor en el último período pasemos a resolver el problema que enfrenta en el período $T-1$:

$$\underset{c_{T-1},\, W_T}{\text{Max}} \quad \mathrm{u}\left(c_{T-1}\right)+\beta\cdot \mathrm{v}_T\left(W_T\right)$$

$$\text{s.a: } W_T=\left(1+r\right)\cdot\left(W_{T-1}-c_{T-1}\right)$$

Sustituyendo la restricción en la función objetivo:

$$\underset{c_{T-1}}{\text{Max}} \quad \mathrm{u}\left(c_{T-1}\right)+\beta\cdot \mathrm{v}_T\left[\left(1+r\right)\cdot\left(W_{T-1}-c_{T-1}\right)\right]$$

Dadas las funciones de utilidad y valor:

$$\underset{c_{T-1}}{\text{Max}} \quad \ln\left(c_{T-1}\right)+\beta\cdot \ln\left[\left(1+r\right)\cdot\left(W_{T-1}-c_{T-1}\right)\right]$$

La CPO orden es:

$$\mathrm{u}'\left(c_{T-1}\right)-\beta\cdot\left(1+r\right)\cdot \mathrm{v}_T'\left[\left(1+r\right)\cdot\left(W_{T-1}-c_{T-1}\right)\right]=0,$$

o,

$$\frac{1}{c_{T-1}}-\beta\cdot\left(1+r\right)\cdot\frac{1}{\left(1+r\right)\cdot\left(W_{T-1}-c_{T-1}\right)}=0$$

Despejamos c_{T-1}:

$$c_{T-1}=\frac{1}{1+\beta}\cdot W_{T-1},$$

$$W_T=\frac{\beta\cdot\left(1+r\right)}{1+\beta}\cdot W_{T-1}$$

Reemplazando los valores hallados en la función objetivo obtenemos la función valor para el período $T-1$:

$$\mathrm{v}_{T-1}\left(W_{T-1}\right)=\mathrm{u}\left(\frac{1}{1+\beta}\cdot W_{T-1}\right)+\beta\cdot \mathrm{v}_T\left[\frac{\beta\cdot\left(1+r\right)}{1+\beta}\cdot W_{T-1}\right],$$

$$\mathrm{v}_{T-1}\left(W_{T-1}\right)=\left(1+\beta\right)\cdot\left[\ln\left(W_{T-1}\right)-\ln\left(1+\beta\right)\right]+\beta\cdot\left[\ln\left(1+r\right)+\ln\left(\beta\right)\right]$$

Volvemos a operar de la misma forma en el período $T-2$ para encontrar c_{T-2} y W_{T-1}.

$$\underset{c_{T-2},\,W_{T-1}}{\mathrm{Max}}\quad \mathrm{u}\left(c_{T-2}\right)+\beta\cdot\mathrm{v}_{T-1}\left(W_{T-1}\right)$$

$$\text{s.a:}\ W_{T-1}=\left(1+r\right)\cdot\left(W_{T-2}-c_{T-2}\right)$$

Sustituyendo la restricción en la función objetivo:

$$\underset{c_{T-2}}{\mathrm{Max}}\ \ \mathrm{u}\left(c_{T-2}\right)+\beta\cdot\mathrm{v}_{T-1}\left[\left(1+r\right)\cdot\left(W_{T-2}-c_{T-2}\right)\right]$$

Reemplazando por la función de utilidad y la función valor del período $T-1$:

$$\underset{c_{T-2}}{\mathrm{Max}}\ \ln\left(c_{T-2}\right)+\beta\cdot\left\{\left[\left(1+\beta\right)\cdot\left[\ln\left(\left(1+r\right)\cdot\left(W_{T-2}-c_{T-2}\right)\right)-\ln\left(1+\beta\right)\right]+\beta\cdot\left(\ln\left(1+r\right)+\ln\left(\beta\right)\right)\right]\right\}$$

Obtenemos la CPO:

$$\frac{1}{c_{T-2}}-\beta\cdot\left(1+\beta\right)\cdot\frac{1}{\left(1+r\right)\cdot\left(W_{T-2}-c_{T-2}\right)}=0\text{ ,}$$

$$c_{T-2}=\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\cdot W_{T-2}$$

$$W_{T-1}=\frac{\beta\cdot\left(1+\beta\right)\cdot\left(1+r\right)}{1+\beta+\beta^2}\cdot W_{T-2}$$

$$\mathrm{v}_{T-2}\left(W_{T-2}\right)=\left(1+\beta+\beta^2\right)\cdot\left[\ln\left(W_{T-2}\right)-\ln\left(1+\beta+\beta^2\right)\right]+$$
$$+\left(\beta+2\cdot\beta^2\right)\cdot\left[\ln\left(1+r\right)+\ln\left(\beta\right)\right]$$

Siguiendo con el procedimiento podemos encontrar c_{T-3}, W_{T-2} y v_{T-2}:

$$c_{T-3} = \frac{1}{1+\beta+\beta^2+\beta^3} \cdot W_{T-3}$$

$$W_{T-2} = \frac{\beta \cdot \left(1+\beta+\beta^2\right) \cdot (1+r)}{1+\beta+\beta^2+\beta^3} \cdot W_{T-3}$$

$$\mathrm{v}_{T-3}\left(W_{T-3}\right) = \left(1+\beta+\beta^2+\beta^3\right) \cdot \left[\ln\left(W_{T-3}\right) - \ln\left(1+\beta+\beta^2+\beta^3\right)\right] + \\ + \left(\beta + 2\cdot\beta^2 + 3\cdot\beta^3\right) \cdot \left[\ln(1+r) + \ln(\beta)\right]$$

Supongamos que llegamos al período $T-s$, haciendo $s = T-t$ el problema se puede escribir:

$$\underset{c_t,\, W_{t+1}}{\mathrm{Max}} \quad \mathrm{u}\left(c_t\right) + \beta \cdot \mathrm{v}_{t+1}\left(W_{t+1}\right)$$

$$\text{s.a: } W_{t+1} = (1+r) \cdot \left(W_t - c_t\right)$$

Por inducción completa se puede demostrar que c_t, W_{t+1} y v_t poseen la siguiente forma:

$$c_t = \frac{1}{1+\beta+\ldots+\beta^{T-t}} \cdot W_t$$

$$W_{t+1} = \frac{\beta \cdot \left(1+\beta+\ldots+\beta^{T-t-1}\right) \cdot (1+r)}{1+\beta+\ldots+\beta^{T-t}} \cdot W_t$$

$$\mathrm{v}_t\left(W_t\right) = \left(1+\beta+\ldots+\beta^{T-t}\right) \cdot \left[\ln\left(W_t\right) - \ln\left(1+\beta+\ldots+\beta^{T-t}\right)\right] + \\ + \left(\beta + 2\cdot\beta^2 + \ldots + (T-t)\cdot\beta^{T-t}\right) \cdot \left[\ln(1+r) + \ln(\beta)\right]$$

Luego, en el período inicial el consumo, los activos y la utilidad indirecta son iguales a[5]:

$$c_0 = \left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}} \right) \cdot W_0$$

$$W_1 = \left(\frac{1-\beta^{T}}{1-\beta^{T+1}} \right) \cdot \beta \cdot (1+r) \cdot W_0$$

$$\mathrm{v}_0(W_0) = \left(\frac{1-\beta^{T+1}}{1-\beta} \right) \cdot \left[\ln(W_0) - \ln\left(\frac{1-\beta^{T+1}}{1-\beta} \right) \right] + \left[\frac{\beta}{1-\beta} \cdot \left(\frac{1-\beta^{T}}{1-\beta} \right) - \frac{\beta^{T+1} \cdot T}{1-\beta} \right] \cdot \left[\ln(1+r) + \ln(\beta) \right]$$

Si el horizonte de tiempo es infinito la función valor “converge” a la función antes obtenida:

$$\mathrm{v}_0(W_0) = \frac{\ln(W_0)}{1-\beta} + \frac{\ln(1-\beta)}{1-\beta} + \frac{\beta}{(1-\beta)^2} \cdot \left[\ln(1+r) + \ln(\beta) \right]$$

Nótese que esta función valor depende de variables exógenas y de la riqueza del período pero no depende explícitamente del período de tiempo considerado. Haciendo tender T a infinito en $\mathrm{v}_t(W_t)$ obtenemos:

$$\mathrm{v}(W_t) = \frac{\ln(W_t)}{1-\beta} + \frac{\ln(1-\beta)}{1-\beta} + \frac{\beta}{(1-\beta)^2} \cdot \left[\ln(1+r) + \ln(\beta) \right],$$

que es independiente de t .

[5] La suma $S_T = \left(\beta + 2 \cdot \beta^2 + \ldots + T \cdot \beta^T \right)$ se puede escribir como $S_T = \beta \cdot S_{T-1} + \beta \cdot \left(\frac{1-\beta^T}{1-\beta} \right)$, luego, la solución de la ecuación es $S_T = \frac{\beta}{1-\beta} \cdot \left(\frac{1-\beta^T}{1-\beta} \right) - \frac{\beta^{T+1} \cdot T}{1-\beta}$.

4.2 Forma general del método

El procedimiento antes seguido nos indica que podemos, en principio, reducir la dimensionalidad del problema si a partir de considerar resuelto el problema desde el período $t+1$ en adelante buscamos la solución para el período t :

$$\underset{c_t, W_{t+1}}{\text{Max}} \left\{ \text{u}(c_t) + \beta \cdot \text{v}(W_{t+1}) \right\}$$

$$\text{s.a:} \begin{cases} W_{t+1} = R \cdot (W_t - c_t) \\ W_0 > 0 \end{cases}$$

Donde $\text{v}(W_{t+1})$ es el valor máximo de la corriente de utilidad para el problema que se inicia en $t+1$ y $R \equiv (1+r)$. Reemplazando la ecuación de movimiento en la función objetivo obtenemos la siguiente ecuación funcional[6]:

$$\text{v}(W_t) = \underset{W_{t+1}}{\text{Max}} \left\{ \text{u}\left(W_t - R^{-1} \cdot W_{t+1}\right) + \beta \cdot \text{v}(W_{t+1}) \right\}$$

Notemos que si el consumo es nulo entonces $W_{t+1} = R \cdot W_t$ mientras que si es igual a los activos del período, $W_{t+1} = 0$, por lo tanto $0 \leq W_{t+1} \leq R \cdot W_t$. El problema consiste en hallar una función $\text{v}(W)$ tal que luego de aplicar el operador $\text{T}(\text{v}) \equiv \underset{0 \leq W' \leq R \cdot W}{\text{Max}} \left\{ \text{u}(W, W') + \beta \cdot \text{v}(W') \right\}$ sobre esa función desconocida obtengamos nuevamente la misma función $\text{v}(W)$ con que partimos. En este sentido, lo que estamos buscando es un punto fijo del operador (en un

---

[6] Esta ecuación se conoce con el nombre de *ecuación de Bellman* (véase, por ejemplo, Sargent [1987, p. 21] o el trabajo original de Bellman [p. 11, 1965]).

espacio de funciones). Un procedimiento que suele seguirse para hallar dicha función es el que sigue.

4.2.1 Iteración de la función de valor

Partimos de una función inicial y aplicamos sucesivamente el operador para ver hacia qué función converge. El operador entonces actúa de la siguiente manera (ahora no es necesario distinguir el período de tiempo y por eso utilizamos el acento para denotar el próximo período):

$$\mathrm{v}_{j+1}(W) = \underset{0 \le W' \le R \cdot W}{\mathrm{Max}} \left\{ \mathrm{u}\left(W - R^{-1} \cdot W'\right) + \beta \cdot \mathrm{v}_j(W') \right\}$$

Supongamos que iniciamos la tarea con $\mathrm{v}_0(W') \equiv 0$:

$$\mathrm{v}_1(W) = \underset{0 \le W' \le R \cdot W}{\mathrm{Max}} \left\{ \ln\left(W - R^{-1} \cdot W'\right) \right\}$$

Entonces $W' = 0$ y $\mathrm{v}_1(W) = \ln(W)$. Aplicamos la segunda iteración luego de reemplazar ésta en el problema:

$$\mathrm{v}_2(W) = \underset{0 \le W' \le R \cdot W}{\mathrm{Max}} \left\{ \ln\left(W - R^{-1} \cdot W'\right) + \beta \cdot \ln(W') \right\}$$

A partir de la CPO obtenemos: $W' = \dfrac{\beta \cdot R}{1+\beta} \cdot W$, sustituyendo en la función objetivo:

$$\mathrm{v}_2(W) = (1+\beta) \cdot \left[\ln(W) - \ln(1+\beta)\right] + \beta \cdot (\ln \beta + \ln R)$$

Si aplicamos nuevamente el operador a partir de este resultado obtenemos:

$$\mathrm{v}_3(W) = \left(1+\beta+\beta^2\right) \cdot \left[\ln(W) - \ln\left(1+\beta+\beta^2\right)\right] + \left(\beta + 2 \cdot \beta^2\right) \cdot (\ln \beta + \ln R)$$

Por el principio de inducción completa podemos probar que $\mathrm{v}_{n+1}(W)$ es igual a:

$$\mathrm{v}_{n+1}(W)=\alpha_n\cdot\left[\ln(W)-\ln(\alpha_n)\right]+\gamma_n\cdot(\ln\beta+\ln R)$$

Donde:

$$\alpha_n=\beta\cdot\alpha_{n-1}+1\ \alpha_0=1$$

$$\gamma_n=\beta\cdot\gamma_{n-1}+\beta\cdot\left(\frac{1-\beta^n}{1-\beta}\right)\gamma_0=0$$

Estos coeficientes convergen a:

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\frac{1}{1-\beta}$$

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_n=\frac{\beta}{(1-\beta)^2}$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{v}^*(W)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{v}_n(W)=\frac{1}{1-\beta}\cdot\left[\ln(W)+\ln(1-\beta)\right]+\frac{\beta}{(1-\beta)^2}\cdot(\ln\beta+\ln R)$$

Ahora, además de verificar que esta función es un punto fijo del operador vamos a encontrar la función que relaciona W' con W.

$$\mathrm{v}(W)=\underset{0\le W'\le R\cdot W}{\mathrm{Max}}\left\{\ln\left(W-R^{-1}\cdot W'\right)+\frac{\beta}{1-\beta}\cdot\left[\ln(W')+\ln(1-\beta)\right]+\frac{\beta^2}{(1-\beta)^2}\cdot(\ln\beta+\ln R)\right\}$$

De la CPO resulta:

$$W'=\beta\cdot R\cdot W$$

Volviendo a sustituir $W'=\beta\cdot R\cdot W$ en la función objetivo obtenemos la misma función con que partimos:

$$\mathrm{v}(W) = \mathrm{v}^*(W).$$

Por otro lado, reemplazando $W' = \beta \cdot R \cdot W$ en la restricción de presupuesto alcanzamos la función consumo:

$$c = (1-\beta) \cdot W.$$

4.2.2 Ecuación de Euler

A partir de la ecuación de Bellman podemos obtener también la condición clásica dada por la ecuación de Euler. Aplicando la condición de primer orden a dicha ecuación:

$$W_{t+1}: \; -R^{-1} \cdot \mathrm{u}'(c_t) + \beta \cdot \mathrm{v}'(W_{t+1}) = 0$$

Supongamos que conocemos la función $\mathrm{v}(\cdot)$ y esta es diferenciable. El teorema sobre envolventes nos permite conocer cómo cambia la utilidad en el máximo si modificamos un parámetro del problema [Sydsaeter y Hammond, pp. 542-44, 1996]. Derivando con respecto a los activos iniciales resulta:

$$\mathrm{v}'(W_t) = \mathrm{u}'(c_t)$$

Desplazando ésta un período hacia delante y sustituyendo en la primera:

$$\mathrm{u}'(c_t) = \beta \cdot R \cdot \mathrm{u}'(c_{t+1})$$

Esta ecuación en diferencias más la restricción de presupuesto forman, nuevamente, el mismo sistema de ecuaciones en diferencias que en los casos anteriores. Reemplazando la restricción en la primera:

$$\mathrm{u}'\left(W_t - R^{-1} \cdot W_{t+1}\right) = \beta \cdot R \cdot \mathrm{u}'\left(W_{t+1} - R^{-1} \cdot W_{t+2}\right),$$

que es la ecuación de Euler de cálculo de variaciones.

5. SUAVIZADO DE SERIES TEMPORALES

Dada una serie temporal $\{y_t\}_{t=1}^{T}$ el problema consiste en descomponer la misma en una componente cíclica, $\{c_t\}_{t=1}^{T}$, y otra de tendencia o crecimiento, $\{g_t\}_{t=1}^{T}$ tal que[7]:

$$\underset{\{g_t\}_{t=-1}^{T}}{\text{Min}} \sum_{t=1}^{T}(c_t)^2 + \lambda \cdot \sum_{t=1}^{T}\left[(g_t - g_{t-1}) - (g_{t-1} - g_{t-2})\right]^2$$

$$\text{s.a: } y_t = g_t + c_t \quad t = 1, 2, \ldots, T$$

En Economía este método para obtener la tendencia de una serie se conoce como filtro de Hodrick y Prescott (véase Hodrick y Prescott [1997]).

La constante λ penaliza la variabilidad en la componente de crecimiento: cuanto más elevado es λ, más suave es el comportamiento de la serie solución.

Reemplazando la restricción en la función objetivo:

$$\underset{\{g_t\}_{t=-1}^{T}}{\text{Min}} \sum_{t=1}^{T}(y_t - g_t)^2 + \lambda \cdot \sum_{t=1}^{T}(g_t - 2 \cdot g_{t-1} + g_{t-2})^2$$

---

[7] Por lo general la serie original se transforma aplicando logaritmo natural. Aquí y_t se entiende que es una serie ya transformada. La tendencia, g_t, es el logaritmo de la tendencia de la serie original ($g_t \equiv \ln x_t$), por lo tanto $g_t - g_{t-1} \equiv \ln x_t - \ln x_{t-1} = \ln(x_t / x_{t-1}) = \ln(1 + \delta_t) \cong \delta_t$, donde $|\delta_t| < 1$ es la tasa de crecimiento de x entre $t-1$ y t, es la tasa de crecimiento en ese intervalo.

El problema posee la siguiente estructura recursiva [Bellman, pp. 158-59, 1965]:

$$f_t\left(g_{t-1}, g_{t-2}\right) = \underset{g_t}{\mathrm{Min}} \left\{ \left(y_t - g_t\right)^2 + \lambda \cdot \left(g_t - 2 \cdot g_{t-1} + g_{t-2}\right)^2 + f_{t+1}\left(g_t, g_{t-1}\right) \right\}$$

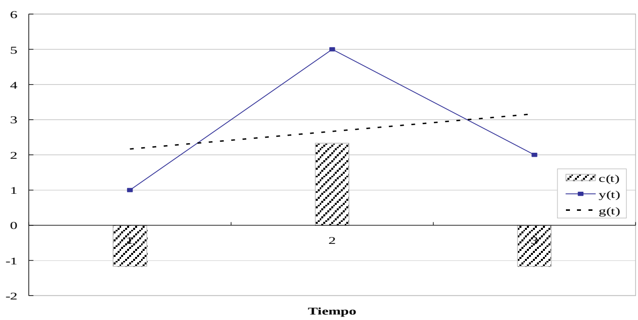
Ejemplo: $\left\{y_t\right\}_{t=1}^{3} = \left\{1, 5, 2\right\}$ y $\lambda = 400$

Aplicando de manera recursiva la ecuación anterior obtenemos:

$$g_{-1} = \frac{54}{49},\ g_0 = \frac{571}{343},\ g_1 = \frac{743}{343},\ g_2 = \frac{915}{343} \text{ y } g_3 = \frac{1.086}{343}$$

La serie original, la tendencia y el ciclo aparecen graficados en la figura 3.

Figura 3. Descomposición de una serie en ciclo y tendencia.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aiub, A. (1985). *Ecuaciones en Diferencias Finitas*, Editorial El Coloquio, Buenos Aires.

Bellman, R. (1965*). Introducción al Análisis Matricial*, editorial Reverté, Barcelona.

Blanchard, O. J. y S. Fischer.(1989). *Lectures on Macroeconomics*. MIT Press, Cambridge, Massachussets.

Evans, G. C. (1924). *The Dynamics of Monopoly*, American Mathematical Monthly 31 (febrero): 77-83.

Hodrick, R. J. y E. Prescott (1997*). Postwar U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation*, Journal of Money, Credit and Banking 29 (Febrero): 1-16.

Hotelling, H. (1931). *The Economics of Exhaustible Resources*, The Journal of Political Economy, vol. 39 (abril): 137-175.

Lucas, R. E., N. L. Stokeycon E. C. Prescott (1989). *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard University Press, Massachusetts.

Obstfeld, M y K. Rogoff (1996). *Foundations of International Macroeconomics*, MIT Press, Massachusetts.

Ramsey, F. P. (1928). *A Mathematical Theory of Saving*, The Economic Journal 38 (diciembre): 543-559.

Sargent, T. J. (1987). *Dynamic Macroeconomic Theory*, Harvard University Press, Massachusetts.

Sydsaeter, K y P. Hammond (1996).*Matemáticas para el Análisis Económico*, Prentice Hall, Madrid.

Varian, H. R. (1992). *Análisis Microeconómico*, tercera edición, Antoni Bosch editor, Barcelona.

APÉNDICE

Trayectoria de la riqueza y consumo en función de la riqueza para T finito

A partir de la definición de riqueza:

$$W_t \equiv b_t + y_t + \sum_{s=t+1}^{T} \left(\frac{1}{1+r} \right)^{s-t} \cdot y_s \ ,$$

operando de la misma manera que para el caso de horizonte infinito llegamos a:

$$W_t \equiv (1+r) \cdot (W_t - c_t) \ ,$$

integrando entre 0 y t obtenemos: $W_t = (1+r)^t \cdot W_0 - \sum_{s=0}^{t-1} (1+r)^{t-s} \cdot c_s$, reemplazando el consumo por la función hallada antes: $c_s = \beta^s \cdot (1+r)^s \cdot \left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}} \right) \cdot W_0$ y resolviendo l aserie geométrica resulta la trayectoria de la riqueza:

$$W_t = (1+r)^t \cdot \left(\frac{\beta^t - \beta^{T+1}}{1-\beta^{T+1}} \right) \cdot W_0$$

Sustituyendo partes de esta expresión en la trayectoria del consumo obtenemos:

$$c_t = \beta^t \cdot (1-\beta) \cdot \left(\frac{1}{\beta^t - \beta^{T+1}} \right) \cdot W_t$$

Finalmente, nótese que haciendo $t = T$ resulta que el consumo del período final es igual a la riqueza del mismo período: $c_T = W_T$.

Prueba: c_0 *se encuentra por encima de la rama del segundo autovector*

Las componentes del segundo autovector son $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}1 & 1-\beta\end{pmatrix}'$. Dado que el "centro de coordenadas" de los autovectores se encuentra en $\left(-(1+r)\cdot r^{-1}\cdot y, 0\right)$, cuando $b_t = b_0$ (medido con respecto al centro de coordenadas $(0,0)$), $v_1(b_0) = b_0 + (1+r)\cdot r^{-1}\cdot y$ y $v_2(b_0) = (1-\beta)\cdot\left[b_0 + (1+r)\cdot r^{-1}\cdot y\right]$ (medido con respecto al centro de coordenadas de los autovectores). Por lo tanto nos preguntamos si $c_0 > v_2(b_0)$, es decir:

$$c_0 = \left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}}\right)\cdot\left[b_0 + \left(1-\frac{1}{(1+r)^{T+1}}\right)\cdot\left(\frac{1+r}{r}\right)\cdot y\right] > (1-\beta)\cdot\left[b_0 + \left(\frac{1+r}{r}\right)\cdot y\right] = v_2(b_0)$$

Notemos que se verifica la desigualdad. Tomando los términos individualmente:

(i) $\left(\dfrac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}}\right)b_0 > (1-\beta)\cdot b_0$, se verifica de forma inmediata.

(ii) $\left(\dfrac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{(1+r)^{T+1}}\right)\cdot\left(\dfrac{1+r}{r}\right)\cdot y > (1-\beta)\cdot\left(\dfrac{1+r}{r}\right)\cdot y$,

simplificando términos y volviendo a ordenar la desigualdad obtenemos:

$$\beta^{T+1}\cdot(1+r)^{T+1} > 1,$$

que se verifica por hipótesis.