REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN MODELOS MATEMATICOS APLICADOS A LA GESTION Y LA ECONOMI AÑO 4 (2017)

CMA CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN METODOS CUANTITATIVOS APLICADOS A LA ECONOMÍA Y LA GESTIÓN IADCOM - UBA

Universidad de Buenos Aires Facultad de Ciencias Económicas

LATINDEX www.latindex.org

http://www.economicas.uba.ar/institutos_y_centros/revista-modelos-matematicos/

LA PRESIÓN SOCIAL EN EL CONSUMO DE UN RECURSO NATURAL RENOVABLE

Verónica García Fronti y Ana Vilker

Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires, Av. Córdoba 2122 - 1120AAQ - Ciudad Autónoma de Buenos Aires, República Argentina.

vgarciafronti@economicas.uba.ar ; anavilker@gmail.com

Resumen

Recibido: 06/2016

Aceptado: 11/2016

Palabras clave

Control óptimo

Recurso renovable

El problema que se plantea en este trabajo es determinar la tasa de extracción óptima de un recurso natural renovable con el objetivo de maximizar intertemporalmente la función bienestar social. Para esto se analizan dos funciones diferentes de bienestar social, el caso más simple en la que la función depende solamente del consumo del recurso y otro en donde se tomará en cuenta el stock, el consumo del recurso y la presión que ejerce la sociedad ante los abusos en la extracción del recurso, esta última situación se analizará tomando como base el trabajo de Almundi I. y Sánchez J. (2006): Influencia social y sustentabilidad en el uso de recursos renovables.

El trabajo presentará el siguiente esquema, en la primer parte se plantearán los conceptos utilizados en la teoría del control óptimo y luego se desarrollarán los dos modelos económicos de explotación de un recurso natural renovable con dos funciones diferentes de bienestar social analizándose mediante la teoría de control óptimo en tiempo continuo y diagrama de fase las distintas trayectorias óptimas que se obtienen en cada caso.

ISSN (En línea) 2362 3225

SOCIAL PRESSURE IN THE CONSUMPTION OF A RENEWABLE RESOURCE

Abstract

KEYWORDS

Optimal Control Theory

Renewable Resource

In this paper we study the optimal extraction rate of a renewable natural resource with the aim of maximizing intertemporally the social welfare function. For this, two different functions of social welfare are analyzed, the simplest case in which the function depends only on the consumption of the resource and another where the stock, the consumption of the resource and the social pressure will be taken into account. Abuses in the extraction of the resource, the latter situation will be analyzed based on the paper of Almundi I. and Sánchez J. (2006): Influencia social y sustentabilidad en el uso de recursos renovables.

The paper will present the following scheme, in the first part will discuss the concepts used in optimal control theory and then develop the two economic models of exploitation of a renewable natural resource with two different functions of social welfare analyzed through control theory Optimum in continuous time and phase diagram the different optimal paths that are obtained in each case.

ISSN (En línea) 2362 3225

1. Teoría de control óptimo

La teoría de control óptimo es utilizada en la teoría económica para realizar una optimización dinámica. En esta teoría la idea es optimizar intertemporalmente una variable objetivo, mediante el control de la trayectoria temporal de una variable que está fuera del control del agente planificador a través de otra variable que sí puede controlar. Es así que se presentan dos tipos de variables, las *variables de estado* sobre las que el decisor no puede decidir directamente y las variables de control que sí puede manejar. Ambas variables son dependientes del tiempo.

Al igual que en optimización clásica en los problemas de optimización dinámica se tiene una función objetivo y una restricción, en este caso se debe definir a la función objetivo para cada momento de tiempo, es decir, continuamente, obteniéndose esto al integrar dicha función respecto al tiempo. Como se define esta función objetivo a lo largo del tiempo es necesario establecer un factor de descuento para que no se sobre o subestime los flujos futuros y que los valores se obtengan en tiempo presente.

Resumidamente, en los problemas de optimización dinámica el objetivo es encontrar el mejor curso de acción para un período de planificación determinado. El objetivo es seleccionar una trayectoria admisible de la variable de control óptima, a la que se llama $u^*(t)$, que tiene asociada una trayectoria admisible óptima de la variable de estado, $x^*(t)$, ambas funciones optimizan al funcional objetivo en un intervalo de tiempo dado.

El problema básico de control óptimo se plantea matemáticamente de la siguiente forma, considerando una única variable de control y de estado:

$$Maximizar\ V = \int_{t_0}^{t_1} F(x,u)e^{-rt}dt$$

$$Sujeto\ a: \quad \frac{dx}{dt} = f(x,u)$$

$$con \qquad x(t_0) = x_0 \quad x(t_1) = libre \quad (considerando\ que\ \ t_0, t_1, x_0\ son\ \ datos)$$

$$u(t) \in \Omega\ \ para\ todo\ t \in [t_0, t_1]$$

En donde:

$x = x(t)$ se denomina variable de estado con $t \in [t_0, t_1]$, es una función continua y con derivada continua por tramos.

$u = u(t)$ se denomina variable de control con $t \epsilon [t_0, t_1]$, es una función continua por tramos.

$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u)$ se denomina ecuación de estado, es una ecuación diferencial que describe el comportamiento de la variable de estado. ($D \subset R^3, f: D \to R, f \in C^1(D)$)

La función del funcional objetivo es continua con derivadas continuas.

Antes de enunciar las condiciones necesarias de primer orden, conocidas como el principio del máximo de Pontryagin se debe definir el Hamiltoniano a valor presente asociado al problema como:

$$H_{VP} = F(x, u) + \lambda e^{rt} f(x, u)$$

Donde $\lambda = \lambda(t)$ con $t \epsilon [t_0, t_1]$ se denomina variable de coestado.

Si se llama $\mu = \lambda e^{rt}$ $(variable\ de\ coestado\ a\ valor\ presente)$

$$H_{VP} = F(x, u) + \mu f(x, u)$$

Para el problema planteado las condiciones necesarias para máximo establecidas por el principio del máximo de Pontryagin son:

$$\begin{cases} 1)\ H_{VP}(x, u^*, \lambda) \geq H_{VP}(x, u, \lambda) \qquad \forall\, t \in [t_0, t_1] \\ 2)\ \dfrac{\partial H_{VP}}{\partial \mu} = \dfrac{dx}{dt} \\ 3)\ -\dfrac{\partial H_{VP}}{\partial x} + r\mu = \dfrac{d\mu}{dt} \\ 4)\ condición\ de\ transversalidad: \mu(t_1) = 0 \end{cases}$$

Estas cuatro ecuaciones permiten establecer las trayectorias óptimas de las variables de control, estado y coestado que maximizan a la función objetivo en un período determinado. Debe destacarse que estas condiciones son necesarias, por lo que más adelante se presentarán las condiciones suficientes que aseguran que las trayectorias encontradas maximizan al funcional objetivo.

En muchos problemas económicos el horizonte de planificación es infinito, en estos casos la integral que se debe maximizar es una integral impropia, de la que se debe asegurar su convergencia. Matemáticamente el problema planteado es:

$$Maximizar\ V = \int_{t_0}^{\infty} G(x,u)e^{-rt}dt$$

$$Sujeto\ a: \quad \frac{dx}{dt} = f(x,u)$$

$$x(t_0) = x_0$$

El hamiltoniano a valor presente asociado en este caso es:

$$H_{VP} = G(x,u) + \mu f(x,u)$$

Las condiciones necesarias de primer orden son:

$$\begin{cases} 1)\ H_{VP}(x,u^*,\lambda) \geq H_{VP}(x,u,\lambda) \\ 2)\ \dfrac{\partial H_{VP}}{\partial \mu} = \dfrac{dx}{dt} \\ 3) -\dfrac{\partial H_{VP}}{\partial x} + r\mu = \dfrac{d\mu}{dt} \\ 4)\ condición\ de\ transversalidad\text{: } \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-rt}\,\mu = 0 \end{cases}$$

El objetivo sigue siendo encontrar las trayectorias a lo largo del tiempo óptimas de la variables de control, estado y coestado $(u^*(t), x^*(t), \lambda^*(t)\ o\ \mu^*(t))$ que maximizan la función objetivo a lo largo del período de planificación. A lo largo del trabajo solo se han planteado las condiciones necesarias, por lo que ahora se mencionarán las condiciones suficientes

$$\begin{cases} G\ cóncava\ en\ (x,u) \\ f\ cóncava\ en\ (x,u) \\ \lambda > 0\ (\mu > 0)\ \ si\ f\ es\ no\ lineal \end{cases}$$

Si se cumplen las condiciones suficientes se puede asegurar que $u^*(t), x^*(t), \lambda^*(t)\ o\ \mu^*(t)$ maximizan a la función objetivo.

Utilizando los conceptos de control óptimo desarrollados se presentará a continuación el problema de optimización de la utilidad del consumo de un recurso natural renovable para un período infinito de planeación Asimismo como las funciones se presentan en forma general se analiza la trayectoria óptima mediante un diagrama de fase del problema planteado.

2. Optimización de la utilidad del consumo de recursos naturales renovables considerando una función de presión social

En los dos modelos que se analizarán se considera que el planificador social tiene como objetivo realizar una asignación intertemporal óptima de un recurso natural renovable de forma tal de maximizar el bienestar social. La variable de *estado* (S) es el stock del recurso natural renovable y la variable de *control* es el consumo del recurso (C).

En ambos modelos se considera que existe un único bien físico, que es un recurso natural renovable (RNR).

Las características de este recurso es que presenta una curva de crecimiento $r(S)$ que depende exclusivamente del stock del mismo (S). Asimismo, el crecimiento del recurso presenta una tasa de crecimiento positiva cuando el stock del recurso es menor al stock de crecimiento máximo (S_{TCM}) y una tasa de crecimiento negativo cuando el stock es mayor que el stock de crecimiento máximo, es decir la función $r(S)$ es estrictamente cóncava $(r''(S) < 0)$ y se verifica que:

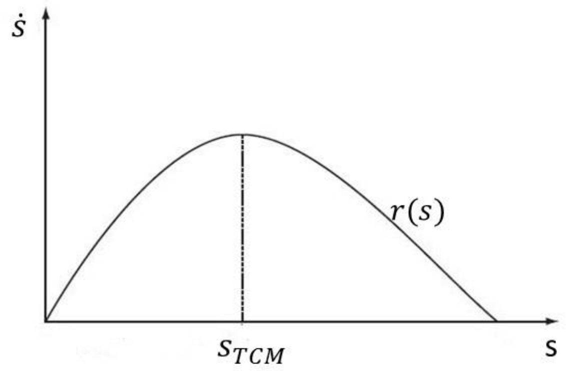
$$r'(S) > 0 \text{ Cuando } S < S_{TCM}$$

$$r'(S) = 0 \text{ Cuando } S = S_{TCM}$$

$$r'(S) < 0 \text{ Cuando } S > S_{TCM}$$

A continuación, en el Gráfico nº 1, se presenta la curva de crecimiento del recurso natural renovable considerado que posee las características planteadas.

Gráfico 1: Función del crecimiento biológico del Recurso Natural Renovable



Fuente: Elaboración propia

El crecimiento real del recurso natural renovable después del consumo es representado por la siguiente ecuación:

$$\dot{S} = r(S) - C$$

Se considera una tasa de preferencia intertemporal, θ, que es positiva y constante.

La diferencia en ambos modelos es las variables que se incorporan en la función utilidad. En el primer modelo a la función utilidad se la considera dependiente sólo del consumo y en el segundo modelo se la considera dependiente del consumo, del stock del recurso y de la presión social. A continuación se describela función utilidad considerada en ambos modelos.

En el primer modelo analizado se asume que la función utilidad depende sólo del consumo del recurso, es decir el recurso es sólo considerado como un bien de consumo y no se le da valor en sí mismo. El planificador define la trayectoria óptima de su consumo sólo en base a satisfacer la demanda del bien a lo largo del tiempo. Matemáticamente el modelo se plantea de la siguiente forma:

$$U\big(C(t)\big)$$

Donde $C(t)$ es una función corriente de consumo, que $U'(\mathrm{C}) > 0 \; y \; U''(\mathrm{C}) < 0$.

En el segundo modelo, propuesto por Almudi y Sanchez (2006), se considera que el bien es valorado tanto como fuente de consumo y con de valor en sí mismo, por lo que la función utilidad tiene como argumentos a las variables consumo (C) y stock (S). Asimismo el modelo incorpora la función presión social $\alpha(C, S)$ que representa la interacción entre la acción de la sociedad y el planificador social. Esta función presión social nunca es negativa, y su primera derivada con respecto al consumo es positiva y negativa con respecto al stock, es decir cuando aumenta el consumo del bien o disminuye la cantidad de stock disponible del recurso natural la presión de la sociedad aumenta exigiendo que se cuide al recurso, es decir el consumo y el nivel de stock del recurso tienen influencias contrarias.

Por lo tanto en el segundo modelo el planificador para definir una trayectoria óptima del consumo del bien, teniendo en cuenta satisfacer no sólo la demanda, sino también el valor intrínseco del bien y las presiones ambientales relacionadas con la conservación de ese bien. La función utilidad considerada tiene como argumentos al consumo, stock y presión social:

$$U(C(t), S(t), \propto (C, S))$$

Se asume que esta función utilidad es continua y doblemente diferenciable y presenta las siguientes características:

$$U'_C > 0;\ U''_{CC}<0$$

$$U'_S > 0;\ U''_{SS}<0$$

$$U''_{SC} = U''_{CS} \geq 0$$

$$U'_\alpha < 0\ ;\ U''_{\alpha\alpha} \leq 0$$

En este contexto, se considera que el planificador social tiene como objetivo realizar una asignación intertemporal óptima del recurso de forma tal de maximizar el bienestar social, es decir, el modelo de maximización puede ser representado matemáticamente de la siguiente forma para cada uno de los modelos analizados:

En el primer modelo:

$$\text{Maximizar} \quad V = \int_0^\infty U(C(t))e^{-\theta t}dt$$

$$\text{Sujeto a:} \qquad \dot{S} = r(S) - C(t)$$

$$condición\ inicial\colon\ S(0) = S_0$$

En el segundo modelo:

$$Maximizar\ \ V = \int_0^\infty U\Big(C(t),\, S(t),\, \alpha(S, \mathrm{C})\Big)\, e^{-\theta t}dt$$

$$sujeto\ a\colon\quad \frac{dS}{dt} = r(S) - C(t)$$

$$condición\ inicial\colon\ S(0) = S_0$$

Donde:

$r(S)$: Función de crecimiento biológico del recurso

S: Stock del recurso natural renovable

θ: Tasa de preferencia intertemporal del consumidor

$\alpha(\mathrm{S}, \mathrm{C})$: Función de presión social

En ambos modelos se asume que la integral impropia converge.

La variable de estado es el stock del recurso natural renovable (S) y la variable de control es el consumo $C(t)$.

Para resolver el problema se construye el Hamiltoniano a valor presente para ambos modelos y se plantean las condiciones necesarias de primer orden:

$$\mathrm{H} = \mathrm{U(C)}e^{-\theta t} + \lambda(r(S) - C) \qquad H = U(C(\mathrm{t}), \mathrm{S(t)}, \alpha(C,S))e^{-\theta t} + \lambda(r(S) - C)$$

$$\begin{cases} 1)\ \dfrac{\partial H}{\partial C} = 0 \rightarrow \quad U_c^{'} e^{-\theta t} - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial C^2} < 0 \rightarrow U_{CC}^{''} < 0 \\ 2)\ \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{S} \quad \rightarrow \quad r(S) - C = \dot{S} \\ 3) \dfrac{\partial H}{\partial S} = -\dot{\lambda} \ \rightarrow \lambda \mathrm{r}'(S) = -\dot{\lambda} \\ 4)\ Condición\ de\ transversalidad \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1)\ \dfrac{\partial H}{\partial C} = 0 \rightarrow \quad (U_C^{'} + U_\alpha^{'} \alpha_C^{'})e^{-\theta t} - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial C^2} < 0 \rightarrow U_{CC}^{''} < 0 \\ 2)\ \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{S} \quad \rightarrow \quad r(S) - C = \dot{S} \\ 3) \dfrac{\partial H}{\partial S} = -\dot{\lambda} \ \rightarrow (U_s^{'} + U_\alpha^{'} \alpha_s^{'})e^{-\theta t} + \lambda \mathrm{r}'(S) = -\dot{\lambda} \\ 4)\ Condición\ de\ transversalidad \end{cases}$$

Si el hamiltoniano es diferenciable con respecto a la variable de control, la primera condición necesaria es que: $\frac{\partial H_{VP}}{\partial C} = 0$ y $\frac{\partial^2 H_{VP}}{\partial C^2} < 0.$ Por los supuestos del modelo se asegura que la derivada segunda es negativa.

Las 2º y 3º condiciones necesarias permiten obtener un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden que en el estado estacionario, es decir cuando las variables, consumo y stock no se modifican a lo largo del tiempo, Para el primer modelo son:

$$\begin{cases} \dot{C} = 0 \rightarrow \ 0 = (\theta - r'(s)) & (1) \\ \dot{S} = 0 \ \rightarrow \ 0 = r(S) - C & (2) \end{cases}$$

Para el segundo modelo:

$$\begin{cases} \dot{C} = 0 \rightarrow \dfrac{U_\alpha \alpha_s + U_S}{U_\alpha \alpha_c + U_C} - (\theta - r'(s)) = 0 & (3) \\ \dot{S} = 0 \ \rightarrow 0 = r(S) - C & (4) \end{cases}$$

Las ecuaciones del estado estacionario obtenidas de las condiciones necesarias están compuestas por funciones generales por lo que no es posible encontrar una solución cuantitativa del problema pero como es autónomo se puede realizar un diagrama de fase y efectuar el análisis correspondiente.

En ambos modelos las dos ecuaciones brindan las curvas de demarcación para definir el diagrama de fase del consumo (C) versus el stock del recurso natural renovable (S). Se puede ver claramente que las curvas de demarcación debido a las ecuaciones 2 y 4 del primer y segundo modelo son exactamente iguales, y esa curva es directamente la curva de crecimiento biológico del recurso natural renovable que se describió anteriormente en el trabajo.

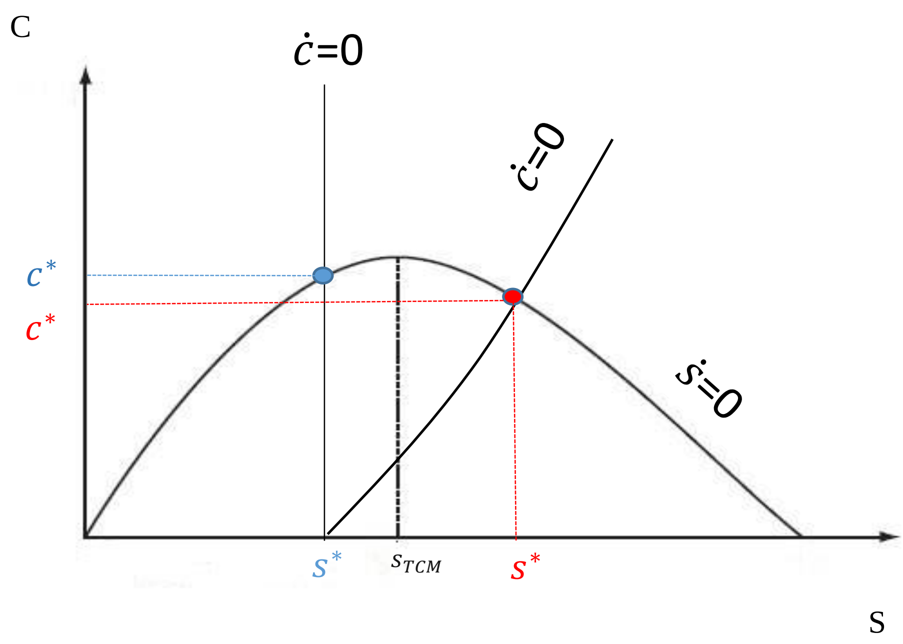
La diferencia entre los modelos se presenta en las ecuaciones 1 y 3. En el primer modelo, la ecuación: $\theta - r'(s) = 0$ en el diagrama de fase, es representado por una recta horizontal ubicada a la izquierda del stock de tasa de crecimiento máximo, ya que $r'(s) > 0$ porque θ es positiva.

En el segundo modelo, la ecuación $\frac{U_\alpha \alpha_s + U_S}{U_\alpha \alpha_c + U_C} - (\theta - r'(s)) = 0$, despejando

$$\frac{U_\alpha \alpha_s + U_S}{U_\alpha \alpha_c + U_C} = \theta - r'(s)$$

En donde, el término $\frac{U_\alpha \alpha_s + U_S}{U_\alpha \alpha_c + U_C}$ es siempre positivo ya que es el cociente entre las utilidades marginales con respecto al consumo y al stock, por lo tanto la tasa de preferencia intertemporal siempre debe ser mayor que el crecimiento marginal del recurso. Las curvas de demarcación para ambos modelos son:

Gráfico nº 2: Curvas de demarcación



En el cruce de las dos curvas se presenta el punto de equilibrio estacionario de la variable de estado y de control que representa el consumo y nivel de stock del recurso al que tiende el modelo. Si se realiza un análisis del sistema dinámico se observa que el punto estacionario es un "punto silla", es decir existe una única trayectoria estable y convergente al equilibrio. Veamos los diagramas de fase y los análisis realizados en cada modelo.

Modelo 1

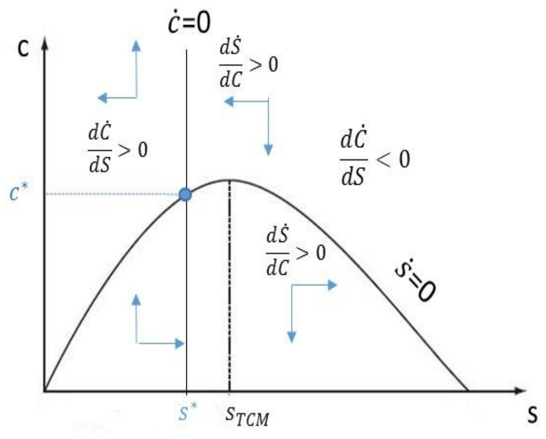
$$\begin{cases} \dot{C} = r'(s) - \theta & (1) \\ \dot{S} = (S) - C & (2) \end{cases}$$

Derivo la primera ecuación con respecto a S y la segunda con respecto a C:

$$\begin{cases} \dfrac{d\dot{C}}{dS} = r''(s) < 0 & (1) \\ \dfrac{d\dot{S}}{dC} = -1 < 0 & (2) \end{cases}$$

Esto determina el siguiente diagrama de fase:

Diagrama de fase modelo 1

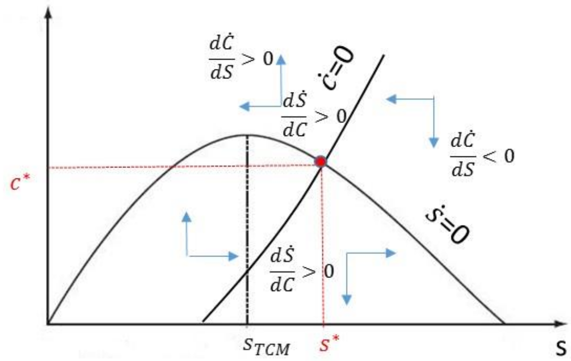


Para el 2º modelo

$$\begin{cases} \dot{C} = \dfrac{U_\alpha \alpha_s + U_S}{U_\alpha \alpha_c + U_C} + r'(s) - \theta & (3) \\ \dot{S} = (S) - C & (4) \end{cases}$$

Derivando la ecuación 3 con respecto a S y la 4 con respecto a C:

$$\begin{cases} \dfrac{d\dot{C}}{dS} < 0 \\ \\ \dfrac{d\dot{S}}{dC} = -1 < 0 \end{cases}$$



En ambos casos al analizar el diagrama de fase se observa que el equilibrio es un "punto silla".

Lo importante de la comparación de ambos modelos se observa que si el planificador tiene en cuenta el valor intrínseco del recurso y considera a la presión social, la trayectoria óptima de consumo establecerá un stock del recurso natural renovable más conservacionista.

Conclusión

En este trabajo se ha utilizado la teoría de control óptimo en tiempo continuo para analizar la trayectoria óptima del consumo de un recurso natural renovable. Se analizaron dos modelos en el primero el planificador tenía en cuenta el consumo y el stock del recurso mientras que en el otro se incorporó a la función de utilidad del consumo una variable que representa la presión social. Se observa que en este último modelo la trayectoria que optimiza la utilidad del consumo se logrará con un mayor stock del recurso natural.

Si bien el modelo no aborda el proceso con el que los agentes sociales hacen conocer la información sobre los problemas ambientales ocasionados por las actividades extractivas de los recursos naturales muestro como los movimientos ambientales concientizadores conducen a una senda de explotación del recurso que asegure un mayor stock disponible.

Referencias bibliográficas

Almudi, I. y Sánchez Chóliz, J. (2006) Influencia social y sostenibilidad en el uso de recursos renovables. *Economía Agraria y Recursos Naturales*. Vol.6, 11. pp. 23-47

Balbas de la Corte, A., Gil Fana, J. A. y Gutiérrez Valdeón S. (1991). Análisis matemático para la Economía I. Calculo diferencial. Madrid, España. Editorial AC.

Chiang, A. y Wainwright, K. (2006). Métodos fundamentales de economía matemática. 4º ed. México. Mc Graw-Hill.

Chiang, A. (2000). Elements of Dynamic optimization. Mc Graw-Hill

Jarne Jarne, G., Minguillón Constante E. y Pérez-Grasa I. (1997). Matemática para la economía. Algebra Lineal y Cálculo Diferencial. Madrid, España. Mc Graw-Hill.

Silberberg, E. (1990). The Structure of Economics. A Mathematical Analysis. Singapore. Mc Graw-Hill.