REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN MODELOS MATEMATICOS APLICADOS A LA GESTION Y LA ECONOMIA AÑO 5 (2018)

CMA CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN METODOS CUANTITATIVOS APLICADOS A LA ECONOMÍA Y LA GESTIÓN
IADCOM - UBA

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas

LATINDEX
http://www.latindex.org/latindex/ficha?folio=2751

http://www.economicas.uba.ar/institutos_y_centros/revista-modelos-matematicos/

# REVISIÓN SOBRE FUNCIONES FACTORIALES Y UNA APLICACIÓN ACTUARIAL DE UNA SUMA DEFINIDA

Leonardo Andrés Dufour

*Centro de investigación en Métodos Cuantitativos aplicados a la Economía y la Gestión (CMA), Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires, Av. Córdoba 2122 - 1120AAQ - Ciudad Autónoma de Buenos Aires, República Argentina.*

*leonardo.dufour@economicas.uba.ar*

## Resumen

Recibido: 10-08-2017

Aceptado: 13-12-2017

**Palabras clave**

Funciones factoriales – Diferencias – Sumación – Variable aleatoria discreta

El presente trabajo está orientado, principalmente, a profesores, ayudantes y colaboradores de las asignaturas Matemática para Economistas y Análisis Numérico. Estas forman parte del ciclo profesional de las carreras de Licenciatura en Economía y Actuario de la Universidad de Buenos Aires.

En primer lugar, se propone la revisión de funciones factoriales y el desarrollo de sus diferencias. Luego, se expone el marco teórico de la integración finita o sumación. Y, finalmente, se muestran dos aplicaciones vinculadas a esta última temática. En particular se desarrolla una suma definida para el cálculo de la esperanza de una variable discreta utilizada en el campo actuarial.



ISSN (En línea) 2362 3225

# REVISION ON FACTORIAL FUNCTIONS AND AN ACTUARIAL APPLICATION OF A DEFINED SUM

## Abstract

**KEYWORDS**

**Factorial Functions - Finite Differences - Summation – Discrete random** variable

This paper is mainly oriented to professors and their assistants of Economic Mathematics and Numeric Calculus subjects. These ones integrate the syllabus of University of Buenos Aires Economics and Actuary studies.

Firstly, it is proposed a review of factorials functions and the proof of their finite differences. Then, it is exposed a framework about finite integration. Finally, it will be shown two applications related to finite integration. In particular, it is developed a definite sum in order to calculate the expected value of a discrete random variable which is used in actuarial field.



ISSN (En línea) 2362 3225

## INTRODUCCIÓN

La operatoria con funciones cuyo dominio es discreto es una herramienta fundamental para la modelización de fenómenos económicos y actuariales. Tal y como se expone en (Bowers, Gerber, Hickman, Jones, & Nesbitt, 1997) y (Dickson, Hardy, & Waters, 2009), una aplicación actuarial podría ser, por ejemplo, el cálculo de la esperanza matemática de una variable discreta K(x) que cuente la parte entera del tiempo de vida futura de una persona de edad x. Dentro de este tipo de funciones de dominio discreto aparecen las denominadas potencias factoriales, foco central de este trabajo.

Por su parte, así como la derivada es una de las operaciones más importantes del cálculo diferencial, la misma relevancia adquiere el operador diferencia en el campo discreto (Boole, 2009). De manera complementaria, existe otro operador denominado antidiferencia o suma indefinida que cumple el papel análogo al de la integral en el cálculo diferencial.

Este trabajo propone, en primer lugar, la revisión en profundidad de las funciones factoriales y el cálculo de sus diferencias finitas. Por otro lado, se expondrá el marco teórico vinculado al concepto de sumación, y, en particular, la explicación de su resolución por el método de partes. Finalmente, se mostrará la operación de una suma definida de una función factorial.

## 1. FUNCIÓN FACTORIAL

### 1.1. Función factorial ascendente

Se denomina función factorial ascendente de orden n y desplazamiento de tamaño h al producto de n factores en progresión aritmética creciente a partir de x (Aiub, s.f).

Se simboliza:

$$f(x) = x^{n/h}$$

Lo cual que implica que:

$$f(x) = x\,(x+h)(x+2h)\ldots\left(x+\overline{n-1}\cdot h\right) \qquad (1)^{1}$$

Siguiendo los desarrollos esbozados por (Arzoumanian, 2002) y (Casparri de Rodriguez, 1976), la diferencia primera de dicha función es:

$$\Delta(x^{n/h}) = (x+h)^{n/h} - x^{n/h}$$

Desarrollando el primer sustraendo de la igualdad:

$$(x+h)^{n/h} = (x+h)(x+2h)(x+3h)\ldots(x+nh)$$

[1] A partir de este apartado la barra superpuesta sobre cualquier expresión del tipo $n-i$ cumple la misma función que los paréntesis, a los fines de simplificar la notación.

Por su parte, $x^{n/h})$ viene dado por (1)

Por lo cual:

$$\Delta(x^{n/h}) = (x+h)(x+2h)(x+3h)\dots(x+nh) - x\,(x+h)(x+2h)\dots(x+\overline{n-1}\cdot h)$$

Nótese que de esta última expresión es posible sacar como factor común los primeros n-1 términos comenzando desde el factor x+h. Del primer sustraendo el único término que no se repite es x+nh, mientras que x es el factor que no se repite en el segundo sustraendo. Por lo tanto, escribiendo esto con la notación factorial introducida en este apartado:

$$\Delta(x^{n/h}) = (x+h)^{n-1/h}(x+nh-x)$$

$$\Delta(x^{n/h}) = n\cdot h\cdot(x+h)^{n-1/h} \tag{2}$$

La diferencia segunda de una función factorial ascendente, viene dada por:

$$\Delta^2(x^{n/h}) = \Delta(\Delta x^{n/h})$$

A partir de la expresión (2), la diferencia segunda entonces será:

$$\Delta^2(x^{n/h}) = \Delta\left[n\cdot h\cdot(x+h)^{n-1/h}\right]$$

Y, dado que n y h son constantes, por la propiedad de linealidad que cumple el operador $\Delta$ :

$$\Delta^2(x^{n/h}) = n\cdot h\cdot\Delta\left[(x+h)^{n-1/h}\right] \tag{3}$$

Ahora, desarrollando $\Delta\left[(x+h)^{n-1/h}\right]$:

$$\Delta\left[(x+h)^{n-1/h}\right] = (x+2h)^{n-1/h} - (x+h)^{n-1/h}$$

$$\Delta\left[(x+h)^{n-1/h}\right] = (x+2h)(x+3h)\dots(x+nh) - (x+h)(x+2h)\dots(x+\overline{n-1}\cdot h)$$

Sacando como factor común $(x+2h)^{n-2/h}$:

$$\Delta\left[(x+h)^{n-1/h}\right] = (x+2h)^{n-2/h}\,[nh-h]$$

$$\Delta\left[(x+h)^{n-1/h}\right] = (n-1)\cdot h\cdot(x+2h)^{n-2/h}$$

Reemplazando dicho resultado obtenido en (3):

$$\Delta^2(x^{n/h}) = n\cdot(n-1)\cdot h^2\cdot(x+2h)^{n-2/h}$$

Si se quisiese generalizar una expresión para la diferencia enésima de una función factorial ascendente, haciendo uso del principio de inducción completa, la hipótesis inductiva para n-1 sería:

$$\Delta^{n-1}(x^{n/h}) = n\cdot(n-1)\dots2\cdot h^{n-1}\left(x+\overline{n-1}h\right)^{1/h}$$

Entonces para n:

$$\Delta^n\left(x^{n/h}\right) = \Delta\left[\Delta^{n-1}(x^{n/h})\right]$$

$$\Delta^n\left(x^{n/h}\right) = \Delta\left[n \cdot (n-1) \dots 2 \cdot h^{n-1}\left(x + \overline{n-1}h\right)^{1/h}\right] \qquad (4)$$

Desarrollando $\Delta\left(x + \overline{n-1}h\right)^{1/h}$:$\Delta\left(x + \overline{n-1}h\right)^{1/h} = (x+nh)^{1/h} - (x + \overline{n-1}h)^{1/h}$

$$\Delta\left(x + \overline{n-1}h\right)^{1/h} = x + nh - \left(x + \overline{n-1}h\right)$$

$$\Delta\left(x + \overline{n-1}h\right)^{1/h} = h$$

Reemplazando esta última expresión en (4):

$$\Delta^n\left(x^{n/h}\right) = n \cdot (n-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot h^n$$

$$\Delta^n\left(x^{n/h}\right) = n! \cdot h^n$$

Es decir, la diferencia enésima de una función factorial resulta ser una constante.

### 1.2 Función factorial descendente

Se denomina función factorial descendente de orden n y desplazamiento de tamaño h al producto de n factores en progresión aritmética decreciente a partir de x.

Se simboliza:

$$f(x) = x^{n/-h}$$

Esto implica que:

$$x^{n/-h} = x(x-h)(x-2h) \dots \left(x - \overline{n-1} \cdot h\right) \qquad (5)$$

El nombre de factorial se debe a que en el caso particular de que x sea igual a n (y h=1), entonces se obtiene:

$$g(n) = n^{n/-1} = n!$$

Por ejemplo, si n=4:

$$g(4) = 4^{4/-1} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$$

La diferencia primera de la función factorial descendente viene dada por:

$$\Delta(x^{n/-h}) = (x+h)^{n/-h} - x^{n/-h}$$

Del desarrollo del primer sustraendo de la anterior expresión surge que:

$$(x+h)^{n/-h} = (x+h)x(x-h)(x-2h)\dots(x-\overline{n-2}\cdot h)$$

Como $x^{n/-h}$ viene dado por (5), entonces:

$$\Delta(x^{n/-h}) = (x+h)x(x-h)\dots\big(x-\overline{n-2}\cdot h\big) - x(x-h)(x-2h)\dots(x-\overline{n-1}\cdot h)$$

Sacando como factor común la expresión $x^{n-1/-h}$ queda:

$$\Delta(x^{n/-h}) = x^{n-1/-h}\left[x+h-(x-\overline{n-1}\cdot h)\right]$$

Operando dentro de la expresión entre corchetes, se llega a:

$$\Delta(x^{n/-h}) = n\cdot h\cdot x^{n-1/-h}$$

Finalmente, el desarrollo de la diferencia enésima de una función factorial descendente se demuestra de manera análoga al de la función factorial ascendente, esbozado en el apartado anterior.

Utilizando el principio de inducción completa se llega a:

$$\Delta^n(x^{n/-h}) = n!\cdot h^n$$

Esto significa que la diferencia enésima es, en este caso también, una constante.

## 2. FUNCIONES FACTORIALES LINEALES UN MODELO CON HORIZONTE FINITO Y TIEMPO DISCRETO

Dado que las formas funcionales que pueden crecer o decrecer aritméticamente no son siempre iguales, en este apartado se expondrán aquellas funciones factoriales lineales del tipo ax+b, por la docilidad que presenta su desarrollo matemático y la plausibilidad de extrapolar sus resultados a funciones de mayor grado.

### 2.1 Función factorial lineal ascendente

Consiste en el producto de $n$ factores de una función lineal, crecientes en progresión aritmética y con desplazamiento de tamaño $h$.

Es decir, siguiendo la notación introducida en el apartado anterior, una función factorial ascendente toma la siguiente forma:

$$(ax+b)^{n/h} = (ax+b)\cdot\big(a\overline{x+h}+b\big)\cdot\big(a\overline{x+2h}+b\big)\dots\big(a\overline{x+\overline{n-1}h}+b\big) \qquad (6)$$

La primera diferencia de dicha función es:

$$\Delta(ax+b)^{n/h} = (a\overline{x+h}+b)^{n/h} - (ax+b)^{n/h} \qquad (7)$$

Desarrollando el primer término del segundo miembro:

$$\left(a\overline{x+h}+b\right)^{n/h}=\left(a\overline{x+h}+b\right)\cdot\left(a\overline{x+2h}+b\right)\cdot\left(a\overline{x+3h}+b\right)\dots\left(a\overline{x+nh}+b\right)$$

Escribiendo de manera factorial los primeros $n-1$ factores, la expresión anterior queda:

$$\left(a\overline{x+h}+b\right)^{n/h}=\left(a\overline{x+h}+b\right)^{n-1/h}\cdot\left(a\overline{x+nh}+b\right)$$

De forma análoga, el segundo término de $(7)$ puede reescribirse de manera factorial a partir de sus últimos $n-1$ factores (teniendo en cuenta el desarrollo esbozado en $(7)$. Así, se obtiene:

$$(ax+b)^{n/h}=(a\overline{x+h}+b)^{n-1/h}\cdot(ax+b)$$

Por lo tanto, volviendo a $(7)$, la diferencia primera de una función factorial lineal ascendente es:

$$\Delta(ax+b)^{n/h}=(a\overline{x+h}+b)^{n-1/h}\cdot\left[\left(a\overline{x+nh}+b\right)-(ax+b)\right]$$

De donde, finalmente:

$$\Delta(ax+b)^{n/h}=a\cdot n\cdot h\cdot(a\overline{x+h}+b)^{n-1/h}$$

Se puede concluir que, al calcular la diferencia primera del producto de $n$ factores de una función lineal, es decir de un polinomio de grado $n$, se obtiene como resultado un polinomio de grado $n-1$ multiplicado por una constante (ya que $a\ \in\mathbb{R}$ , $h\in\mathbb{N}\ \wedge n\in\mathbb{N}$).

## 2.2 Función factorial lineal descendente

Por su parte, puede presentarse el producto de $n$ factores de una función lineal, decrecientes en progresión aritmética y con tamaño de desplazamiento $h$.

La notación en este caso es:

$$(ax+b)^{n/-h}=(ax+b)\cdot\left(a\overline{x-h}+b\right)\cdot\left(a\overline{x-2h}+b\right)\dots(a\overline{x-\overline{n-1}h}+b)$$

Aplicando la definición de diferencias finitas a dicha función:

$$\Delta(ax+b)^{n/-h}=(a\overline{x+h}+b)^{n/-h}-(ax+b)^{n/-h}\qquad(8)$$

Si se desarrolla el primer término del segundo miembro de la igualdad anterior:

$$\left(a\overline{x+h}+b\right)^{n/-h}=\left(a\overline{x+h}+b\right)\cdot(ax+b)\cdot\left(a\overline{x-h}+b\right)\cdot\left(a\overline{x-2h}+b\right)\dots$$

$$\dots(a\overline{x-\overline{n-2}h}+b)$$

Reescribiendo los últimos $n-1$ factores de la expresión anterior de forma factorial:

$$(a\overline{x+h}+b)^{n/-h}=(ax+b)^{n-1/-h}\cdot(a\overline{x+h}+b)$$

Por su parte, $(ax+b)^{n/-h}$ puede ser expresado como el producto entre una función factorial de $n-1$ factores y otra función lineal. Es decir:

$$(ax+b)^{n/-h} = (ax+b)^{n-1/-h} \cdot (\overline{ax - \overline{n-1}h} + b)$$

Volviendo a $(8)$ se tiene que la diferencia de una función factorial lineal y descendente es:

$$\Delta(ax+b)^{n/-h} = (ax+b)^{n-1/h} \cdot \left[(\overline{ax+h} + b) - (\overline{ax - \overline{n-1}h} + b)\right]$$

Operando en la expresión entre corchetes se obtiene como resultado final:

$$\Delta(ax+b)^{n/-h} = a \cdot n \cdot h \cdot (ax+b)^{n-1/h}$$

En este punto es posible concluir dos aspectos importantes. En primer lugar, se puede observar la similitud de los resultados obtenidos al calcular las diferencias primeras de una función factorial lineal ascendente y otra descendente. Solo hay que mencionar que, en el caso de la primera, la variable $x$ queda desplazada en $h$. De todas maneras, en ambos casos se arriba a un polinomio de grado $n-1$. Esto último permite comentar una segunda cuestión relevante. Ella está vinculada a la clara analogía entre los resultados obtenidos en el campo discreto y en el cálculo diferencial. Ya que al calcular la derivada de un polinomio de grado $n$ también se obtiene como resultado un polinomio de grado $n-1$.

## 3. SUMACIÓN

Como se mencionó precedentemente, se puede afirmar sin pérdida de generalidad que muchos de los resultados obtenidos en el campo discreto son análogos a los del cálculo diferencial. Esto también ocurre con la integración de funciones.

Así como $F$ es una primitiva de una función $f$ si $F'(x) = f(x)\ , \forall x \in [a,b] / a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}$, en el campo discreto el operador equivalente se denomina antidiferencia (Casparri, García Fronti, & Krimker, 2008).

Entonces, el problema a plantear es encontrar una función $F(x)$ tal que su diferencia dé como resultado $f(x)$. Es decir2:

$$\Delta F(x) = F(x+1) - F(x) = f(x)$$

Si la expresión anterior se cumple, quiere decir que $F(x)$ es la antidiferencia o la suma indefinida de $f(x)$ y esto se denota como:

$$\Delta^{-1} f(x) = F(x)$$

O, utilizando la notación equivalente:

$$\sum f(x) = F(x)$$

[2] En este apartado se considerará $h=1$.

De la misma forma que si una función tiene antiderivada, dicha antiderivada no es única, si $F$ es una antidiferencia de $f$ resulta que $F(x) + \alpha(x)$, donde $\alpha(x)$ es cualquier función de período $1$ (esto es, $\alpha(x+1) = \alpha(x)$ para toda $x$), también es una antidiferencia de $f$ (Casparri, García Fronti, & Krimker, 2008).

Para demostrar la afirmación anterior basta con suponer que existe otra función $G(x)$ que también es una antidiferencia de $f(x)$. Así, se tiene que:

$$\Delta F(x) = F(x+1) - F(x) = f(x) \tag{9}$$

$$\Delta G(x) = G(x+1) - G(x) = f(x) \tag{10}$$

Restando miembro a miembro $(9)$ de $(10)$, se llega a:

$$G(x+1) - G(x) - [F(x+1) - F(x)] = 0$$

$$G(x+1) - F(x+1) = G(x) - F(x)$$

Si se define a $\alpha(x)$ como $G(x) - F(x)$, entonces:

$$\alpha(x+1) = G(x+1) - F(x+1)$$

Lo que implica que:

$$\alpha(x+1) = \alpha(x)$$

Así queda demostrado que dado un valor fijo de $x$, $\alpha(x)$ actúa como una constante $\alpha$. Esto quiere decir que existen infinitas sumas indefinidas de $f(x)$ que difieren únicamente en dicha constante.

### 3.1 Suma definida

Asignando límites inferiores y superiores a la sumatoria se arriba al concepto de suma definida. El mismo está estrechamente ligado al Teorema de Barrow aplicado en el cálculo diferencial (Casparri, García Fronti, & Krimker, 2008).

Para ello, supóngase que se tiene una serie de valores de la función $f(x)$ (Arzoumanian, 2002). Estos pueden ser: $f(x+ph); f(x+\overline{p+1}h) + \cdots + f(x+nh)$, con $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} \wedge h \in \mathbb{N}$. Si se quisieran sumar todos los valores anteriores, esto se representaría como:

$$\sum_{s=p}^{n} f(x+sh) = f(x+ph) + f(x+\overline{p+1}h) + \cdots + f(x+nh)$$

Si existe $F(x)$ tal que $\Delta F(x) = f(x)$, entonces (Arzoumanian, 2002) demuestra que:

$$\sum_{s=p}^{n} f(x+sh) = F(x+\overline{n+1}h) - F(x+ph)$$

Demostración

Si:

$$\Delta F(x) = F(x+h) - F(x)$$

y:

$$\Delta F(x+sh) = F(x+\overline{s+1}h) - F(x+sh)$$

Entonces:

$$\sum_{s=p}^{n} f(x+sh) = \sum_{s=p}^{n} [F(x+\overline{s+1}h) - F(x+sh)] = \sum_{s=p}^{n} F(x+\overline{s+1}h) - \sum_{s=p}^{n} F(x+sh)$$

Considerando el tercer miembro de la igualdad, si se separa de la primera suma el último término y de la segunda suma se separa el primer término, queda:

$$\sum_{s=p}^{n} f(x+sh) = F(x+\overline{n+1}h) + \sum_{s=p}^{n-1} F(x+\overline{s+1}h) - F(x+ph) - \sum_{s=p+1}^{n} F(x+sh)$$

Cambiando los límites de la primer sumatoria que aparece en el último miembro:

$$\sum_{s=p}^{n} f(x+sh) = F(x+\overline{n+1}h) + \sum_{s=p+1}^{n} F(x+sh) - F(x+ph) - \sum_{s=p+1}^{n} F(x+sh)$$

Por lo cual, finalmente se obtiene lo que se quería demostrar:

$$\sum_{s=p}^{n} f(x+sh) = F(x+\overline{n+1}h) - F(x+ph)$$

## 4. MÉTODO DE SUMACIÓN POR PARTES

Al momento de intentar resolver la suma definida de un producto de dos funciones, puede ser útil aplicar el método de sumación por partes3, análogo al desarrollado en las integrales del cálculo diferencial.

Para ello, es necesario recordar que $\Delta[f(x)\cdot g(x)] = f(x+1)\cdot g(x+1) - f(x)\cdot g(x)$

Teniendo en cuenta esta última expresión, si se suma y se resta $g(x+1)\cdot f(x)$ al segundo miembro de la igualdad, se obtiene:

$$\Delta[f(x)\cdot g(x)] = f(x+1)\cdot g(x+1) - f(x)\cdot g(x) + g(x+1)\cdot f(x) - g(x+1)\cdot f(x)$$

Tomando como factor común $g(x+1)$ y $f(x)$:

$$\Delta[f(x)\cdot g(x)] = g(x+1)\cdot[f(x+1) - f(x)] + f(x)\cdot[g(x+1) - g(x)]$$

[3] Puede ocurrir que dadas las formas funcionales, el método de resolución por partes no pueda ser utilizado. En este caso se deberá recurrir a otro método. Véase Arzoumanian, P. (2002). Notas de Análisis Numérico. Buenos Aires: FAMS.

$$\Delta[f(x)\cdot g(x)] = g(x+1)\cdot\Delta f(x) + f(x)\cdot\Delta g(x)$$

Finalmente, aplicando el operador $\Delta^{-1}$ miembro a miembro, se tiene que:

$$\sum f(x)\cdot\Delta g(x) = f(x)\cdot g(x) - \sum \Delta f(x)\cdot g(x+1)$$

En el caso de tratarse de sumas definidas, la expresión anterior queda

$$\sum_{a}^{b} f(x)\cdot\Delta g(x) = f(x)\cdot g(x)\Big|_{a}^{b+1} - \sum_{a}^{b} \Delta f(x)\cdot g(x+1) \qquad (11)$$

## 5. UNA APLICACIÓN ACTUARIAL PARA LAS SUMAS DEFINIDAS

En el campo actuarial se definen funciones biométricas vinculadas al cálculo de probabilidades de supervivencia y muerte de las personas.

En particular, una de las variables aleatorias de mayor relevancia para ello aparece en la literatura con la notación de $T(x)$ (Bowers, Gerber, Hickman, Jones, & Nesbitt, 1997). Esta representa el tiempo que media al fallecimiento (o tiempo de vida futuro) para una persona de edad $x$, simbolizada como $(x)$.

De esta manera, pueden definirse probabilidades del tipo:

$$Prob[T(x) \leq t]$$

que se interpreta como la probabilidad de que el tiempo que media al fallecimiento para una persona de edad $x$ sea menor o igual que $t$.

Otra forma de denotar lo mismo es:

$$q(x;0;t) = F_{T(x)}(t)$$

siendo $F_{T(x)}(t)$ la función de distribución acumulada de la variable aleatoria $T(x)$.

Por otro lado, por definición se tiene que:

$$S_{T(x)}(t) = 1 - F_{T(x)}(t)$$

donde $S_{T(x)}(t)$ denota la función de supervivencia de la variable aleatoria $T(x)$.

A su vez:

$$S_{T(x)}(t) = Prob[Tx > t] = p(x;t)$$

que se interpreta como la probabilidad de que una persona de edad $x$ sobreviva hasta la edad $x + t$.

Teniendo en cuenta estos breves conceptos, es posible definir otra variable aleatoria que contemple solamente la parte entera del tiempo que media al fallecimiento para una persona de edad $x$. La misma se denota como $K(x)$.

Es decir que $K(x)$ es una variable aleatoria discreta, por lo que el cálculo de su esperanza matemática viene dado por:

$$E[K(x)] = \sum_{\forall k} k \cdot Prob[K(x) = k]$$

Siguiendo la notación introducida anteriormente:

$$E[K(x)] = \sum_{\forall k} k \cdot q(x; k; 1)$$

En particular, la aplicación que se expondrá a continuación, siguiendo la explicación de (Dickson, Hardy, & Waters, 2009) se conoce como esperanza abreviada y limitada de la variable aleatoria $K(x)$ y se denota como $e(x; n; m)$. Para su cálculo se aplicará el método de resolución por partes esbozado anteriormente:

$$e(x; n; m) = 0 \cdot q(x; 0; n) + \sum_{k=0}^{m-1} k \cdot q(x; n+k; 1) + m \cdot p(x; n+m) \qquad (12)$$

Donde:

$$\sum_{k=0}^{m-1} k \cdot q(x; n+k; 1) = k \cdot \Delta^{-1} q(x; n+k; 1) \Big|_{0}^{m} - \sum_{0}^{m-1} \Delta k \cdot \Delta^{-1} q(x; n+k; 1) \Big|_{k+1}$$

Esto quiere decir que para dicha suma definida, teniendo en cuenta $(11)$:

$$f(k) = k \; ; \; \Delta f(k) = 1$$

$$\Delta g(k) = q(x; n+k; 1) \; ; \; g(k) = -p(x; n+k); \;\; g(k+1) = -p(x; n+k+1)$$

Por lo tanto, reemplazando en $(12)$:

$$e(x; n; m) = \left[ -k \cdot p(x; n+k) \,{}_{0}^{m} + \sum_{k=0}^{m-1} p(x; k+n+1) \right] + m \cdot p(x; n+m)$$

Cambiando los límites de la sumatoria que está entre corchetes queda:

$$e(x; n; m) = -m \cdot p(x; n+m) + \sum_{k=n+1}^{m+n} p(x; k) + m \cdot p(x; n+m)$$

De donde finalmente se alcanza la esperanza abreviada:

$$e(x; n; m) = \sum_{k=n+1}^{m+n} p(x; k)$$

## 6. APLICACIÓN DEL MÉTODO DE PARTES PARA LA SUMA DE UNA FUNCIÓN FACTORIAL MULTIPLICADA POR UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL

A partir de la suma definida del producto de dos funciones, donde una de ellas sea un polinomio de grado mayor a uno y la otra sea una función exponencial, entonces puede ocurrir que se deba aplicar de manera reiterada el método de partes. Esto se puede apreciar en el siguiente desarrollo:

$$\sum_{x=3}^{x=9}(3x+1)^{2/-1}\cdot 2^x$$

donde:

$$f(x)=(3x+1)^{2/-1}\ ;\ \Delta f(x)=6\cdot(3x+1)$$
$$\Delta g(x)=2^x;\ \ g(x)=2^x;\ \ g(x+1)=2\cdot 2^x$$

Por lo tanto:

$$\sum_{x=3}^{x=9}(3x+1)^{2/-1}\cdot 2^x=(3x+1)^{\frac{2}{-1}}\cdot 2^x\Big|_{3}^{10}-12\cdot\sum_{3}^{9}(3x+1)\cdot 2^x$$

Como se observa, al quedar el producto de una función lineal y una función exponencial en la sumatoria del segundo miembro de la igualdad anterior, entonces debe aplicarse el método de partes nuevamente. Esto es:

$$\sum_{x=3}^{x=9}(3x+1)^{2/-1}\cdot 2^x=888272-12\cdot\left[(3x+1)\cdot 2^x\Big|_{3}^{10}-6\cdot\sum_{x=3}^{9}2^x\right]$$

Operando en el término entre corchetes se obtiene:

$$\sum_{x=3}^{x=9}(3x+1)^{\frac{2}{-1}}\cdot 2^x=888272-12\cdot[31664-6\cdot(2^{10}-2^3)]$$

$$\sum_{x=3}^{x=9}(3x+1)^{2/-1}\cdot 2^x=581456$$

## 7. CONCLUSIONES

En este trabajo se expuso el marco teórico de las funciones factoriales, tanto ascendentes como descendentes. Además se realizó la revisión de los operadores diferencia y suma indefinida, análogos a los de derivada e integración del cálculo diferencial. En este sentido una de las conclusiones más importantes es que los resultados alcanzados trabajando en el campo discreto son similares a los obtenidos en el cálculo diferencial.

Finalmente, definiendo límites inferiores y superiores para la suma, una de sus aplicaciones en el área actuarial es el cálculo de la esperanza matemática de la variable aleatoria $K(x)$, suponiendo que el tiempo de vida futuro de una persona solo puede tomar valores enteros. Y, su resolución puede implicar la utilización del método de sumación por partes.

**REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

Aiub, A. (s.f.). Ecuaciones en diferencias finitas . Buenos Aires: El coloquio.

Arzoumanian, P. (2002). Notas de Análisis Numérico. Buenos Aires: FAMS.

Boole, G. (2009). A treatise on the calculus of finite differences. Londres: Cambridge University Press.

Bowers, N., Gerber, H., Hickman, J., Jones, D., & Nesbitt, C. (1997). Actuarial Mathematics. Schaumburg, Illinois: The Society of Actuaries.

Casparri de Rodriguez, M. T. (1976). Diferencias y ecuaciones en diferencias. Buenos Aires: El Coloquio.

Casparri, M. T., García Fronti, J., & Krimker, G. (2008). Notas de Análisis Numérico con Aplicaciones al Cálculo Actuarial.

Dickson, D., Hardy, M., & Waters, H. (2009). Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks. New York: Cambridge University Press.