REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN MODELOS MATEMATICOS APLICADOS A LA GESTION Y LA ECONOMIA AÑO 5 (2018)

CMA CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN METODOS CUANTITATIVOS APLICADOS A LA ECONOMÍA Y LA GESTIÓN IADCOM - UBA

Universidad de Buenos Aires Facultad de Ciencias Económicas

LATINDEX
http://www.latindex.org/latindex/ficha?folio=2751

http://www.economicas.uba.ar/institutos_y_centros/revista-modelos-matematicos/

MODELO MATEMÁTICO PARA LA GESTIÓN ÓPTIMA DE UN INVENTARIO

Roberto Armando García

Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires, Av. Córdoba 2122 - 1120AAQ - Ciudad Autónoma de Buenos Aires, República Argentina.

robertogarcia@economicas.uba.ar

Resumen

Recibido: 14-07-2017

Aceptado: 14-11-2017

Palabras clave

Inventario - costos - optimización

La gestión de inventarios en una empresa tiene por objetivo asegurar la disponibilidad de stock cuando sea necesario logrando reducir al mínimo posible las existencias, ya que la mayoría de las empresas inmovilizan importantes sumas de dinero en reservas de materias primas y productos terminados de forma de garantizar la continuidad de sus actividades, evitando problemas y pérdidas causadas por falta de materiales. El costo de mantener productos almacenados suele alcanzar valores significativamente altos, por lo cual se hace necesaria una buena administración que defina políticas adecuadas para optimizar los costos de inventario.

Para la gestión de inventarios se han desarrollado distintos tipos de modelos que se clasifican en dos grandes grupos a saber: determinísticos y estocásticos, según se conozca con certeza o no la demanda de los artículos que se mantienen en el almacén a la espera de ser utilizados. En este artículo se desarrolla un modelo determinístico para optimizar el costo total de inventario con una limitación de espacio para el almacenamiento de los productos. El fundamento matemático en que se basa su desarrollo es la teoría de optimización no lineal con restricciones de desigualdad de Kuhn y Tucker.

Copyright: Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires.

ISSN (En línea) 2362 3225

MATHEMATICAL MODEL FOR THE OPTIMUM MANAGEMENT OF AN INVENTORY

Abstract

KEYWORDS

Inventory - costs - optimization

Inventory management, in a company, aims to ensure the availability of stock by reducing inventory to a minimum, as most companies immobilize large sums of money in inventory of raw materials and finished products in order to guarantee the continuity of its activities, avoiding problems and losses caused by lack of materials. The cost of maintaining stored products usually reaches significantly high values, which is necessary to define adequate policies to optimize inventory costs.

For the management of inventories have been developed different types of models that are classified into two large groups namely: deterministic and stochastic, as it is known with certainty or not the demand for items that are kept in the warehouse waiting to be used. In this article a deterministic model is developed to optimize the total cost of inventory with a limited space for the storage of the products. Its mathematical development is based is the nonlinear optimization theory with Kuhn and Tucker inequality constraints.

Copyright: Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires.

ISSN (En línea) 2362 3225

INTRODUCCIÓN

La mayoría de las empresas inmovilizan importantes sumas de dinero en reservas de materias primas y productos terminados, de forma de garantizar la continuidad de sus actividades, evitando problemas y pérdidas causadas por falta de materiales. El costo de mantener productos almacenados suele alcanzar valores significativamente altos, por lo cual se hace necesaria una buena administración que defina políticas adecuadas para optimizar los costos de inventario.

Un modelo matemático para la gestión de un stock debe basarse en el análisis de todos los costos que intervienen en la formación y mantenimiento del mismo, tales como aquellos derivados de la gestión de compras y/o producción de los productos que se almacenan, los costos de adquisición y/o de producción propiamente dichos, como así también los costos producidos por faltante de materiales, entre otros.

Para el análisis de inventarios se han desarrollado distintos tipos de modelos que se clasifican en dos grandes grupos, a saber: determinísticos y estocásticos, según se conozca con certeza o no la demanda de los artículos que se mantienen en el almacén a la espera de ser utilizados.

En este artículo se desarrolla un modelo determinístico para optimizar el costo total de inventario con una limitación de espacio para el almacenamiento de los productos. El fundamento matemático en que se basa su desarrollo es la teoría de optimización no lineal con restricciones de desigualdad de Kuhn y Tucker. La planilla de cálculo constituye una herramienta auxiliar poderosa para ejecutar los cálculos requeridos.

GESTIÓN DE INVENTARIOS

En una organización la gestión de inventarios supone asegurar existencia de materiales en reserva para ser utilizados en el futuro. Una administración racional ha de encontrar el equilibrio entre los perjuicios y costos provocados por la falta de materiales cuando se los necesita y el costo de almacenamiento de grandes cantidades de los mismos para evitar el riesgo de interrumpir las actividades y satisfacer los pedidos de los clientes. Definir una política de inventario constituye un problema de optimización cuyo objetivo es minimizar el costo total del inventario, incluidos todos sus componentes como el costo administrativo de compras o producción, el costo de mantenimiento de existencias en el almacén y el costo por faltante de materiales, entre otros.

Se han formulado muchos modelos cuantitativos para inventarios distinguiéndose dos grandes tipos, los determinísticos y los estocásticos. En los primeros se conoce la demanda del artículo que se almacena con certeza; los segundos incorporan la incertidumbre y la demanda se describe mediante alguna distribución de probabilidad.

Si se considera el caso de una empresa que almacena cantidades de varios artículos destinados a la venta, en un espacio limitado, cuyas demandas son independientes y constantes durante un período considerado, la gestión del inventario puede resolverse mediante un modelo específico basado en la teoría de optimización restringida de Kuhn y Tucker. Se trata de determinar las cantidades que deben pedirse de cada artículo, denominadas lotes de compra, cada vez que se renueve el inventario, que quepan en el espacio físico para almacenamiento y que hagan mínimo el costo total asociado... La solución de este problema se conoce como política óptima de stock.

Modelo matemático de un inventario multiproducto con limitación de espacio de almacenamiento

Este modelo se basa en las siguientes hipótesis:

1. Se almacenan n productos cuyas demandas son independientes.
2. La demanda D_j de cada producto es constante para el período de tiempo T.
3. El costo unitario de adquisición de cada producto es b_j , constante e independiente del tamaño de la compra.
4. El costo de una orden de compra de cada tipo de producto es k_j.
5. El costo de mantenimiento de cada unidad de producto por unidad de tiempo es c_J
6. No se admite faltante de ninguno de los productos.
7. La reposición se realiza en un único día (reposición instantánea) en lotes de tamaño Q_{cj} a intervalos regulares de tiempo t_{cj} (ciclo de stock).
8. Q^*_{cj} es el tamaño óptimo del lote de compras del producto j.
9. Cada unidad de producto j ocupa un volumen v_j (volumen específico).
10. El espacio disponible para el almacenamiento de los productos del inventario es V.

El costo total de inventario para el período de tiempo T está compuesto por tres componentes: costo de adquisición (CA), costo de mantenimiento o tenencia (CT), costo de preparación u órdenes de compra (CO).

El valor de estas componentes del costo para cada producto puede calcularse del siguiente modo,

$$CA_j = D_j b_j \tag{1}$$

$$CT_j = c_j T \overline{Q_J} \tag{2}$$

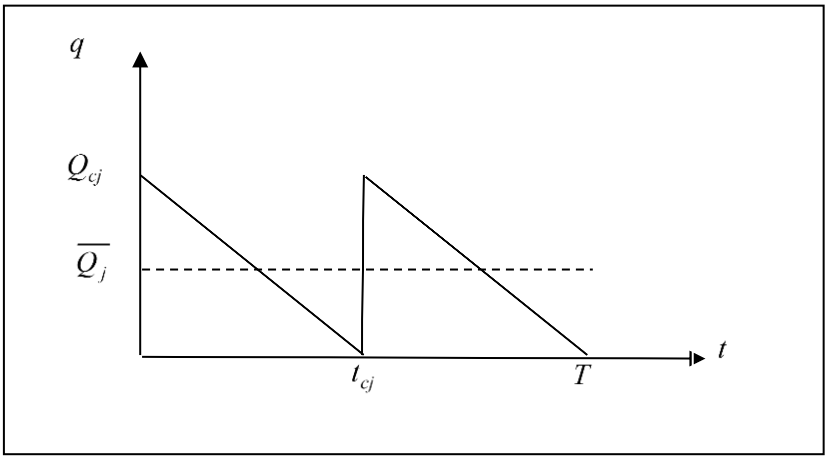
Donde $\overline{Q_J}$ es el stock medio durante un ciclo de stock.

Si $r_j = \frac{D_j}{T} = \frac{Q_{cj}}{t_{cj}}$ es la tasa de demanda que corresponde al producto j,

La función cuyo valor es la cantidad de producto en existencia en función del tiempo o ley de stock se muestra en la figura 1 y está dada por la expresión:

$$q_j = -r_j t + Q_{cj} \tag{3}$$

Figura 1: Ley de stock



El stock medio puede calcularse como sigue:

$$\overline{Q}_j = \frac{1}{t_{cj}} \int_0^{t_{cj}} (-r_j.t + Q_{cj}).dt = \frac{1}{t_{cj}} (-r_j.\frac{t^2}{2} + Q_{cj}.t) \Big|_0^{t_{cj}} = -r_j.\frac{t_{cj}}{2} + Q_{cj} = -\frac{Q_{cj}}{2} + Q_{cj} = \frac{Q_{cj}}{2} \quad (4)$$

Por lo tanto

$$CT_j = \frac{1}{2}.c_j T.Q_{cj} \quad (5)$$

$$CO_j = k_j.N_j \quad (6)$$

Donde $N_j = \dfrac{D_j}{Q_{cj}}$ es el número de órdenes de compra del producto J colocadas en el período T.

Queda por lo tanto:

$$CO_j = k_j.\frac{D_j}{Q_{cj}} \quad (7)$$

El costo total de inventario para el período T y para el producto j es

$$C_j = CA_j + CO_j + CT_j \quad (8)$$

$$C_j = f(Q_{cj}) = b_j.D_j + k_j.\frac{D_j}{Q_{cj}} + \frac{1}{2} c_j T.Q_{cj} \quad (9)$$

El costo total de inventario para el modelo multiproducto está dado por la siguiente función convexa:

$$C = \sum_{j=1}^{n} C_j = \sum_{j=1}^{n} b_j.D_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} c_j T.Q_{cj} + \sum_{j=1}^{n} k_j.\frac{D_j}{Q_{cj}} \quad (10)$$

Para hallar la política óptima de inventario debe plantearse como objetivo minimizar la función de costo sujeta a la restricción de espacio para el almacenamiento de los productos. Se trata entonces del siguiente problema de optimización con una restricción de desigualdad:

$$\text{Min } C = f(\mathbf{Q_c}) \text{ sujeta a } \langle \mathbf{v}, \mathbf{Q_c} \rangle \le V \quad (11)$$

Donde

$\mathbf{Q_c} = (Q_{c1}, Q_{c2}, ..., Q_{cj}, ...Q_{cn})$ es el vector de lotes de compras,

$\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_j, ..., v_n)$ es el vector de volúmenes específicos

$\langle \mathbf{v}, \mathbf{Q_c} \rangle$ es el producto interno entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{Q_c}$

$C = f(\mathbf{Q_c}) = \sum_{j=1}^{n} C_j = \sum_{j=1}^{n} b_j.D_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} c_j T.Q_{cj} + \sum_{j=1}^{n} k_j.\frac{D_j}{Q_{cj}}$ es la función objetivo

La restricción es lineal y el conjunto de puntos factible

$S = \left\{ \mathbf{Q_c} \in \Re^n / \sum_{j=1}^{n} v_j.Q_{cj} \leq V \ y \ Q_{cj} \geq 0, \forall j = 1,\ldots,n \right\}$ es un conjunto convexo

Se introduce una variable de holgura

$$X = V - \langle \mathbf{v}; \mathbf{Q_c} \rangle \qquad (12)$$

El valor de la variable de holgura se interpreta como el menor espacio libre que podría quedar en el depósito (si las reposiciones de todos los productos se recibieran juntas el mismo día)

La restricción puede escribirse en forma de igualdad como

$$\langle \mathbf{v}; \mathbf{Q_c} \rangle + X = V \qquad (13)$$

La función auxiliar de Lagrange para este problema es

$$L(\mathbf{Q_c}, X, \lambda) = \sum_{j=1}^{n} b_j.D_j + \sum_{j=1}^{n} k_j.\frac{D_j}{Q_{cj}} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} c_j T.Q_{cj} + \lambda.\left[V - X - \sum_{j=1}^{n} v_j Q_{cj} \right] \qquad (14)$$

Las condiciones necesarias de óptimo según Kuhn y Tucker son

I. $\frac{\partial L(\mathbf{Q_c}, X, \lambda)}{\partial Q_{cj}} = -k_j.\frac{D_j}{Q_{cj}^{\ 2}} + \frac{1}{2}.c_j T - \lambda.v_j = 0 \quad \forall j / j \in IN$ y $j \leq n$ (15)

II. $\frac{\partial L(\mathbf{Q_c}, X, \lambda)}{\partial \lambda} = V - X - \sum_{j=1}^{n} v_j.Q_{cj} = 0$ (16)

III. $\lambda \leq 0$ (condición de signo del multiplicador de KKT para mínimo).

IV. $X \geq 0$ (condición de factibilidad).

V. $\lambda.X = 0$ (condición de holgura complementaria).

Tratándose de la optimización de una función convexa en un conjunto convexo, las condiciones anteriores son necesarias y también suficientes.

A continuación se detalla el procedimiento para obtener el punto que minimiza el costo de inventario:

1) De (V): $\lambda = 0$ ó $X = 0$

2) Se supone $\lambda = 0$

3) De (I): $Q_{cj} = \sqrt{\dfrac{2k_j D_j}{c_j T}} \quad j = 1,2,\ldots,n$

4) De (II): $X = V - \sum_{j=1}^{n} v_j . Q_{cj}$

5) Si $X \geq 0$ entonces las componentes del vector óptimo de compras $\mathbf{Q}_c^*$ son los valores Q_{cj} obtenidos en el cálculo (3)

6) Si $X < 0$ entonces se supone $\lambda < 0$

7) De (I): $Q_{cj} = \sqrt{\dfrac{2k_j D_j}{c_j T - 2v_j \lambda}} \quad j = 1,2,\ldots,n$

8) De (II): $X = V - \sum_{j=1}^{n} v_j . Q_{cj}$

9) Si $X < 0$ entonces se supone $\lambda < 0$ de mayor valor absoluto y se repiten los cálculos (7) y (8).

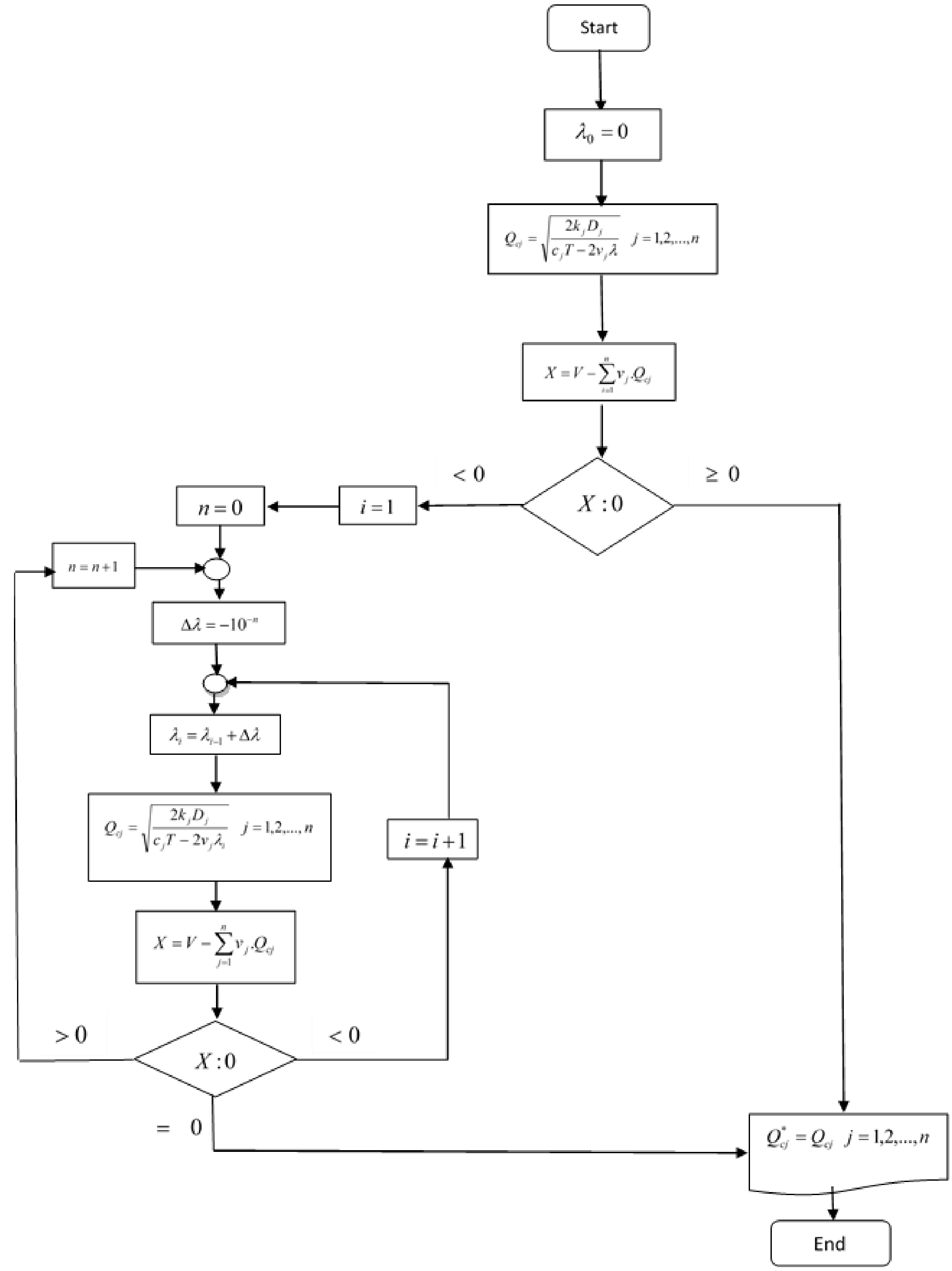
10) Si $X > 0$ entonces se supone $\lambda < 0$ de menor valor absoluto y se repiten los cálculos (7) y (8).

11) Si $X = 0$ entonces los lotes calculados en (7) optimizan el costo.

Algoritmo de cálculo para obtener la política óptima

Para lograr visibilizar correctamente el procedimiento de optimización descripto anteriormente se utiliza un diagrama de flujo como el que se muestra a continuación.

DIAGRAMA DE FLUJO



La utilización del diagrama de flujo es importante en este tipo de problemas de optimización, ya que permite ayudar al decisor a visibilizar sintéticamente todos los pasos desarrollados para abordar a la solución deseada.

CONCLUSIÓN

Para las empresas la gestión de inventarios permite asegurar la continuidad de las actividades frente a eventuales cambios en los niveles de venta, tiempos de producción y demanda que resulta difícil de predecir. Esta gestión implica básicamente responder dos preguntas, ¿qué cantidad pedir o fabricar en cada renovación del inventario? y ¿cuándo pedir o renovar el inventario?

Existen distintos modelos matemáticos para el análisis de inventarios y el tema es objeto de estudio de la asignatura Métodos Cuantitativos que se dicta en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires para las carreras de Actuario y Contador Público.

En este artículo se ha desarrollado uno de los modelos para un sistema de inventario multiproducto con demanda determinística y con restricción de espacio para almacenamiento. El cálculo de los lotes óptimos de cada artículo se resuelve aplicando la teoría de optimización restringida de Kuhn y Tucker. Se trata de un cálculo iterativo que puede resolverse con apoyo tecnológico o programa, en cuyo caso visibilizar el procedimiento mediante un algoritmo puede ser muy útil.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anderson D., Sweeney D., Williams T., Camm J, Martin K. (2011); Métodos cuantitativos para los negocios; México; Cengage Learning

Davis K.R., Mckeown P.G. (1986); Modelos cuantitativos para la administración; México; Grupo Editorial Iberoamérica

Eppen, G.D. (2000); Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa; México; Prentice-Hall

Hillier F. S., Lieberman G.J. (2010); Introducción a la investigación de operaciones; México; McGraw Hill

Taha, Handy A. (2004); Investigación de operaciones; México; Pearson Educación