REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN MODELOS MATEMÁTICOS APLICADOS A LA GESTIÓN Y LA ECONOMÍA AÑO 6 VOLUMEN II (2019-II)

CMA CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN METODOS CUANTITATIVOS APLICADOS A LA ECONOMÍA Y LA GESTIÓN IADCOM - UBA

Universidad de Buenos Aires Facultad de Ciencias Económicas

LATINDEX
http://www.latindex.org/latindex/ficha?folio=2751

http://www.economicas.uba.ar/institutos_y_centros/revista-modelos-matematicos/

PROGRAMACIÓN DINÁMICA EN LA GESTIÓN DE RECURSOS NATURALES

Verónica García Fronti y Roberto García

Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Económicas, Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la Gestión (CMA), Av. Córdoba 2122 – 1120AAQ. Ciudad Autónoma de Buenos Aires, República Argentina

vgarciafronti@economicas.uba.ar; robertogarcia@economicas.uba.ar

Resumen

Recibido: 06-08-2019

Aceptado:03-12-2019

Palabras clave

Programación dinámica determinística,
Recursos naturales no renovables

En el contexto de la gestión de recursos naturales, este trabajo aplica la herramienta matemática de programación dinámica en tiempo discreto a lo largo de un horizonte temporal predeterminado en el marco de la optimización dinámica. El objetivo del trabajo es explicar la metodología empleada en programación dinámica mediante su aplicación a un caso concreto de extracción de un recurso natural no renovable.

El trabajo se estructura en tres partes: En la primera se describen las características generales y principios de la programación dinámica en tiempo discreto, en la segunda parte se plantea su aplicación a un modelo general de extracción de un recurso natural no renovable y, en la tercera y última parte, se resuelve un ejemplo numérico concreto sobre un modelo simplificado de gestión de un recurso natural no renovable.

ISSN (En línea) 2362 3225

DYNAMIC PROGRAMMING FOR NATURAL RESOURCE MANAGEMENT

Abstract

This paper describes a dynamic programming-based approach to solve non-renewable natural resources problems. The aim is to explain the methodology used in dynamic programming through its application in a case of extraction of a non-renewable natural resource.

The paper is structured in three sections, the first describes the general characteristics and principles of dynamic programming in discrete time, in the second section, the technique is proposed to a general model of management of natural resource and, in the third and last section, a numerical example is solved on a simplified model of management of a non-renewable natural resource.

KEYWORDS
Deterministic dynamic programming,
Non-renewable natural resource

ISSN (En línea) 2362 3225

INTRODUCCIÓN

La programación dinámica es uno de los métodos matemáticos, junto con el cálculo de variaciones y la teoría de control óptimo, para la solución de problemas de optimización dinámica. En este trabajo nos centraremos en la aplicación del método para la asignación eficiente de recursos naturales no renovables en un plazo de tiempo determinado. El problema consiste en determinar la cantidad a extraer del recurso en cada uno de los períodos, con el objetivo de maximizar el beneficio obtenido.

En este artículo se explica paso a paso, mediante un ejemplo práctico, cómo definir la política óptima de extracción de un recurso, siguiendo el método de la programación dinámica determinística en tiempo discreto. Para esto, en la primera parte del trabajo se describen las características relevantes de la técnica cuantitativa aplicada; en la segunda parte se plantea su aplicación a un modelo general de extracción de un recurso natural no renovable y, en la tercera y última parte, se resuelve un ejemplo numérico concreto sobre un modelo simplificado de gestión de un recurso natural no renovable.

1. CARACTERÍSTICAS Y PRINCIPIOS DE LA PROGRAMACIÓN DINÁMICA

1.1 Características

En los problemas de programación dinámica el agente decisor resuelve un problema de optimización intertemporal, en el cual elige una secuencia de decisiones que optimizan la función objetivo. La programación dinámica es una técnica matemática de optimización en la que se descompone el problema original en subproblemas de menor tamaño, para que así sea más sencillo realizar los cálculos. Estos cálculos se realizan en forma recursiva ya que la solución óptima de un subproblema se utiliza como dato de entrada para el siguiente subproblema.

El procedimiento utilizado en programación dinámica se basa en el uso del principio de optimalidad de Bellman, el mismo establece que dada una secuencia óptima de decisiones, cualquier subsecuencia que se tome también será una subsecuencia óptima; esto permite descomponer el problema original en subproblemas que son más manejables. En forma resumida los elementos característicos de la programación dinámica son (Hillier et al, 2010):

a) Cada problema original se puede descomponer en etapas y cada una de estas etapas requiere una política de decisión.

b) En cada etapa es posible determinar estados asociados al inicio, y la decisión de cada etapa modifica al estado inicial de la etapa actual en un estado asociado con el inicio de la siguiente etapa.

c) Se considera que, definido un estado actual del sistema, la política de decisión óptima para las siguientes etapas es independiente de la decisión tomada en las etapas anteriores, es decir sólo depende del estado actual y no de la forma en que se llegó a ese estado. Esto se conoce como principio de optimalidad de programación dinámica.

d) Se dispone de una relación recursiva que identifica la política óptima de la etapa n dada la política optima de la etapa n+1, en el caso de realizar recursividad en retroceso. De la misma forma, si se realiza una recursividad en avance se conocerá la política óptima de la etapa n conocida la política óptima de la etapa n-1.

1.2 Principios

En los problemas de optimización dinámica, se considera la evolución de un sistema dinámico a lo largo de N etapas que parte del estado inicial x_0 y cuya evolución depende del valor que se dé a la variable de control, u, que influye en el sistema. Así el objetivo será optimizar, maximizar o minimizar, el valor de la función objetivo.

El modelo matemático del problema general, P, considerando el caso de una maximización, se puede plantear de la siguiente forma (Cerda Tena, 2012):

$$P\begin{cases} \underset{\{u(k)\}_{k=0}^{N-1}}{MAX} \quad J = \sum_{k=0}^{N-1} F[x(k), u(k), k] + S[x(N)] \\ Sujeto\ a: \quad x(k+1) = f(x(k), u(k), k), \quad para\ \ k = 0,1, \dots, N-1 \\ \qquad Con: x(0) = x_0 \end{cases}$$

Donde:

$u(k): variable\ de\ control \qquad k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$

$x(k): variable\ de\ estado \qquad k \in \{0, 1, \dots, N\}$

$x(k+1) = f(x(k), u(k), k): ecuación\ de\ estado\ o\ de\ transición$

$J: funcional\ objetivo$

$S: función\ evaluada\ al\ final\ del\ horizonte\ temporal$

$cuando\ ya\ no\ se\ toman\ \ decisiones$

Para resolver este problema se acude al principio de optimalidad de Bellman:

La secuencia de variables de control: $u^* = \left(u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(N-1)\right)$ es óptima para el problema P dado, sí y solo sí u_k^* con $k = j, j+1, \dots, N-1$ resuelve el siguiente problema para todo $j = 0,1, \dots, N-1$:

$$P_k\begin{cases} \underset{\{u(k)\}_{k=j}^{N-1}}{MAX} \quad J = \sum_{k=j}^{N-1} F[x(k), u(k), k] + S[x(N)] \\ Sujeto\ a: \quad x(k+1) = f(x(k), u(k), k), \quad para\ \ k = j, j+1, \dots, N-1 \\ \qquad Con: x(k) = dado \end{cases}$$

De esta forma el problema P_k puede ser planteado en términos de una relación recursiva:

$$P_k\begin{cases} J_k^*\{x(k)\} = \underset{\{u(k)\}_{k=j}^{N-1}}{MAX} \quad \{F[x(k), u(k), k] + J_{k+1}^*(x(k+1))\} \\ Sujeto\ a: \quad x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \quad para\ \ k = j, j+1, \dots, N-1 \\ \qquad Con: x(k)\ \ dado \end{cases}$$

El valor óptimo del problema P planteado estará dado por: $J_0^*(x(0))$. En donde la función J_0^* se obtiene en el último paso del algoritmo que comienza al final del horizonte temporal y va hasta el principio del horizonte temporal.

Se comienza por la etapa final, entonces la contribución al funcional del final de la etapa N es:

$$J_N^*\{x(N)\} = S[x(N)]$$

Luego para cada $k \in \{N-1,\ N-2, \dots, 1,0\}$ se debe resolver el problema:

$$\begin{gathered} J_k^*\{x(k)\} = \underset{u(k)}{MAX} \quad \{F[x(k),u(k),k] + J_{k+1}^*(x(k+1))\} \\ Sujeto\ a: x(k+1) = f(x(k),u(k),k) \quad para\ k = 0,1, \dots N-1 \\ Con: x(k)\ \ dado \end{gathered}$$

Si se considera el factor de descuento β $(\beta \in (0,1))$ el problema P se plantea:

$$P \begin{cases} \underset{\{u(k)\}_{k=0}^{N-1}}{MAX} \quad V = \sum_{k=0}^{N-1} \beta^k F[x(k),u(k),k] + \beta^N S[x(N)] \\ Sujeto\ a: \qquad x(k+1) = f(x(k),u(k),k), \quad para\ \ k = 0,1,\dots,N-1 \\ \qquad Con: x(0) = x_0 \end{cases}$$

El problema puede plantearse en forma recursiva mediante las ecuaciones de Bellman:

$$P_k \begin{cases} V_k^*\{x(k)\} = \underset{u(k)}{MAX} \quad \{F[x(k),u(k),k] + \beta V_{k+1}^*(x(k+1))\} \\ \qquad Sujeto\ a: x(k+1) = f(x(k),u(k),k) \\ \qquad Con: x(k)\ \ dado \end{cases}$$

A continuación, se explicará el procedimiento a seguir a través de un ejemplo de gestión de un recurso natural no renovable.

2. MODELO DE GESTIÓN DE UN ÚNICO RECURSO NATURAL NO RENOVABLE

En los modelos de extracción de un recurso natural no renovable se plantea maximizar los beneficios futuros del agente decisor en un período de planificación determinado. Se trata de determinar la tasa óptima con que debe extraerse el mineral, conocido el stock inicial y para un período de planificación definido. Esta problemática se puede abordar con el enfoque de la programación dinámica, para lo cual se considera un horizonte temporal finito de N etapas o periodos, pasados los cuales el valor de la reserva restante es nulo.

El modelo matemático del problema planteado es:

$$P \begin{cases} \underset{\{u(k)\}_{k=0}^{N-1}}{MAX} \quad V = \sum_{k=0}^{N-1} \beta^k \pi_k(x_k, u_k) + \beta^N S[x(N)] \\ Sujeto\ \ a: \qquad x(k+1) = x(k) - u(k), \qquad para\ \ k = 0,1,\dots,N-1 \\ \qquad Con: x(0) = x_0 \end{cases}$$

Donde:

$x(k)$: Variable de estado. Stock del recurso al inicio de cada período k+1.

$u(k)$: Variable de control. Cantidad del recurso a extraer en el período k+1.

$\pi_k(x(k), u(k))$: Beneficio en el período k+1.

β: Factor de descuento

Aplicando las ecuaciones de Bellman, el problema queda planteado en forma recursiva del siguiente modo:

$$\begin{cases} V_k^*\{x(k)\} = \underset{u(k)}{MAX} \quad \{\pi_k(x_k, u_k) + \beta V_{k+1}^*(x(k+1))\} \\ \qquad Sujeto\ a: \quad x(k+1) = x(k) - u(k) \\ \qquad\qquad Con: x(k)\ dado \end{cases}$$

Para resolver el problema dado se empieza por el final y luego se analizan sucesivamente las N etapas de planificación.

Final ($\boldsymbol{k = N}$)

El stock del recurso al final de la etapa $N\ será\ x(N)$ de acuerdo con el enunciado la contribución a la función objetivo de $x(N)$ es 0 ya que el stock del recurso restante luego del período de planificación no aporta ninguna ganancia: $V_N^*\{x(N)\} = S[x(N)] = 0$

Etapa $\boldsymbol{N}$ ($\boldsymbol{k = N - 1}$)

Sea el stock del recurso al comienzo de la etapa N: $x(N-1)$, la ecuación de Bellman para la etapa N será:

$$V_{N-1}^*\{x(N-1)\} = \underset{u(N-1)\ adm}{MAX} \{\pi_{N-1}(x(N-1), u(N-1)) + \beta V_N^*\{[x(N)]\}\}$$

Como:

$$V_N^*\{x(N)\} = 0$$

$$u(N-1)\ adm: valores\ admisibles\ de\ la\ variable\ de\ control:\ 0 \leq u(N-1) \leq x(N-1)$$

Por lo que:

$$V_{N-1}^*\{x(N-1)\} = \underset{u(N-1)\ adm}{MAX} \{\pi_{N-1}(x(N-1), u(N-1))\}$$

De esta manera se debe seleccionar el valor de la tasa de extracción, $u^*(N-1)$ que maximiza al funcional $V_{N-1}^*\{x(N-1)\}$ cuando el stock disponible al comienzo de la etapa es $x(N-1)$. Una vez que ya se tiene resuelto este subproblema se avanza a la siguiente etapa y así sucesivamente hasta la etapa 2.

Etapa 2 ($\boldsymbol{k = 1}$)

El stock del recurso al comienzo de la etapa 2 es: $x(1)$

La ecuación de Bellman para la etapa 2 será:

$$V_1^*\{x(1)\} = \underset{u(1)\,adm}{MAX}\{\pi_1(x(1), u(1)) + \beta V_2^*\{x(2)\}\}$$

Nuevamente, al igual que en las etapas anteriores, se debe seleccionar el valor de la tasa de extracción, $u^*(1)$ que maximiza al funcional $V_1^*\{x(1)\}$ cuando el stock disponible al comienzo de la etapa es $x(1)$. Una vez resuelto este subproblema se avanza a la etapa inicial para finalizar el proceso.

Etapa inicial: etapa 1 ($k = 0$)

Sea el stock del recurso inicial dado en el enunciado del problema: $x(0) = x_0$

La ecuación de Bellman para la etapa 1 con $k = 0$ será:

Los valores admisibles de la cantidad a extraer del recurso en la etapa 1 son:

$$0 \leq u(0) \leq x(0)$$

La ecuación de Bellman en esta etapa será:

$$V_0^*\{x(0)\} = \underset{u(0)\,adm}{MAX}\{\pi_0(x(0), u(0)) + \beta V_1^*\{x(1)\}\}$$

De esta forma, al resolver la etapa inicial se concluye el algoritmo. Haciendo un recorrido de principio a fin se obtiene la secuencia óptima de extracciones de recurso y su stock disponible en cada caso. Asimismo, el valor de $V_0^*\{x(0)\}$ brinda el valor del beneficio a lo largo de todo el período de planificación óptimo.

A continuación, se presentará y resolverá paso a paso un ejemplo numérico sobre este caso de extracción de un recurso natural no renovable.

3. EJEMPLO NUMÉRICO

La autoridad responsable de la gestión de una mina busca maximizar los beneficios de extraer y comercializar un determinado mineral. Para esto debe decidir la cantidad a extraer del recurso a lo largo de 4 años de explotación, transcurrido ese período el valor del mineral en la mina es nulo. Se cuenta con un stock inicial del recurso de 120 unidades y se considera que el factor de descuento es: $\beta = 0.6$.

Cada año empieza con un stock del recurso, $x(k)$, del cual es extraída una cantidad, $u(k)$. La cantidad extraída en cada período puede ser de 0, 10, 20 o 30 unidades y debe ser menor o igual al stock disponible al comienzo de ese período: $0 \leq u(k) \leq x(k)$.

El stock disponible al comienzo de un período depende del stock disponible y de la extracción realizada en el período anterior: $x(k + 1) = x(k) - u(k)$

Los costos de extracción del recurso dependen del stock y de la cantidad a extraer. En la Tabla 1 se indican estos valores.

Tabla 1: Costos de extracción del recurso según el stock y cantidad a extraer

u \ x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
0	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
10		100	50	33	25	20	17	14	13	11	10	9	8
20			200	133	100	80	67	57	50	44	40	36	33
30				300	225	180	150	129	113	100	90	82	75

Fuente: Elaboración propia

Los ingresos por cada año de explotación dependen del precio unitario de venta $p(k)$ y de la cantidad vendida. Se considera que se vende la totalidad del recurso extraído en cada etapa, por lo tanto, el ingreso por año es: $I(k) = p(k) * u(k)$. En la Tabla 2 se indican los precios previstos para cada etapa.

Tabla 2: Precio unitario del recurso por año

Etapa	k	Precio
1	0	6
2	1	8
3	2	7
4	3	9

Fuente: Elaboración propia

De esta forma, los beneficios netos por la extracción y venta del recurso para cada período dependen de los ingresos obtenidos por la venta menos los costos para lograr esa extracción:

$$\pi_k\big(x(k), u(k)\big) = p(k) * u(k) - c\left(x(k), u(k)\right)$$

Donde:

$x(k)$: Stock del recurso al inicio de cada período k+1. Es la variable de estado.

$u(k)$: Cantidad del recurso a extraer en el período k+1. Es la variable de control.

$p(k)$: Precio unitario del mineral en el período k+1.

$\pi_k\big(x(k), u(k)\big)$: Beneficio en el período k+1.

$c(x(k), u(k))$: Costo de extracción y comercialización en el período k+1.

En base a esto se debe definir, por medio del método de programación dinámica, la cantidad a extraer en cada período del recurso de forma que se maximice el valor presente de los beneficios.

El modelo matemático del problema a resolver es:

$$\underset{u(k)_{k=0}^{3}}{MAX} \sum_{k=0}^{3} 0{,}6^k \left[p(k) * u(k) - c(x(k), u(k)\right] + 0{,}6^4 S(x(4))$$

Sujeto a: $x(k+1) = x(k) - u(k)$

Con: $x(0) = 120$

$$u(k) \in \{0{,}10{,}20{,}30\}, \quad para\ k = 0{,}1{,}2{,}3$$

$$u(k) \leq x(k) \quad para\ k = 0{,}1{,}2{,}3$$

De acuerdo con la política de extracción del recurso -que permite extraer en cada etapa 0, 10, 20 o 30 unidades- es factible armar una tabla (Tabla 3) con los posibles valores que puede tomar el stock (x) del recurso en cada etapa. La construcción de esta tabla se realiza partiendo de la etapa 1, en donde el stock es conocido y es de 120 unidades ($x(0) = 120$); en la etapa 2 el stock inicial va a depender de la etapa anterior : $x(1) = x(0) - u(0)$ por lo tanto, $x(1)$ puede ser de 120 (si no se extrajo nada en la etapa 1), 110 (si se extrajeron 10 unidades en la etapa 1), 100 (si se extrajeron 20 unidades del mineral en la etapa 1) y 90 (si se extrajeron 30 unidades en la etapa 1). Para las siguientes etapas se definen los stocks disponibles de la misma forma, tal como se muestra en la Tabla 3.

Tabla 3: Stocks disponibles al comienzo de cada etapa

$x(0)$	120												
$x(1)$	120	110	100	90									
$x(2)$	120	110	100	90	80	70	60						
$x(3)$	120	110	100	90	80	70	60	50	40	30			
$x(4)$	120	110	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0

Fuente: Elaboración propia

Como se ha explicado anteriormente, se comienza el procedimiento analizando una etapa del problema inicial en la que se busca la solución óptima y después se va agrandando en forma gradual, hasta resolver el problema original completo. A continuación, se explicará el procedimiento para el problema de gestión de un recurso no renovable planteado.

Final ($\boldsymbol{k = 4}$)

El stock del recurso al final de la etapa 4, es decir al finalizar el período de planificación será $x(4)$, cuya contribución a la función objetivo es nula ya que el stock del recurso restante luego del período de planificación no aporta ninguna ganancia, por lo tanto:

$$V_4^*\{x(4)\} = S[x(4)] = 0$$

Etapa 4 ($\boldsymbol{k = 3}$)

Sea el stock del recurso al comienzo de la etapa 4: $x(3)$, y el precio unitario de acuerdo con la Tabla 2: $p(3) = 9$

La ecuación de Bellman para la etapa 4 será:

$$V_3^*\{x(3)\} = \underset{u(3)}{MAX} \quad \{p(3) * u(3) - c(x(3), u(3)) + 0{,}6 * V_4^*(x(4)\}$$

Como: $V_4^*\{x(4)\} = S[x(4)] = 0$ y $p(3) = 9$

Por lo que:

$$V_3^*\{x(3)\} = \underset{u(3)\in\{0,10,20,30\}}{MAX} \quad \{9 * \ u(3) - c(x(3), u(3))\}$$

De esta manera se debe seleccionar, en la etapa 4, el valor de $u^*(3)$ que maximiza al funcional $V_3^*\{x(3)\}$ cuando el stock disponible al comienzo de la etapa es $x(3)$.

Los posibles valores que puede tomar el stock del recurso al comienzo de la etapa 4 son: $x(3) \in \{120,110,100,90,80,70,60,50,40,30\}$.

En base a esto se construye la Tabla 4, por ejemplo: Si el stock al inicio de la etapa 4 es de 110 unidades, se podrán extraer 0, 10, 20 o 30 unidades y para cada una de estas decisiones el beneficio global obtenido será ($V_3(110, u(3))$:

$$V_3(110,0) = 9 * 0 - c(110,0) = 0 - 5 = -5$$
$$V_3(110,10) = 9 * 10 - c(110,10) = 90 - 9 = 81$$
$$V_3(110,20) = 9 * 20 - 36 = 144$$
$$V_3(110,30) = 9 * 30 - 82 = 188$$

Si se repite el procedimiento para cada stock inicial disponible en la etapa 4, se obtiene la Tabla 3, en donde se han explicitado para facilitar la comprensión, los cálculos realizados cuando el stock inicial es de 120 unidades.

Tabla 4: Beneficio en función del stock inicial $x(3)$ *las diferentes políticas de extracción* $u(3)$ *en la Etapa 4*

$x(3)$	$u(3)$	$V_3[x(3), u(3)] = 9 * u(3) - c[x(3), u(3)]$
120	0	$V_3(120,0) = 9 * 0 - c(120,0) = 0 - 5 = -5$
	10	$V_3(120,10) = 9 * 10 - c(120,10) = 90 - 8 = 82$
	20	$V_3(120,20) = 9 * 20 - c(120,20) = 180 - 33 = 147$
	30	$V_3(120,30) = 9 * 30 - c(120,30) = 270 - 75 = 195$
110	0	-5
	10	81
	20	144
	30	188
100	0	-5
	10	80
	20	140
	30	**180**
90	0	-5
	10	79
	20	136
	30	**170**
80	0	-5
	10	78
	20	130
	30	**158**
70	0	-5
	10	76
	20	123

	30	**141**
60	0	-5
	10	73
	20	113
	30	**120**
50	0	-5
	10	70
	20	**100**
	30	90
40	0	-5
	10	65
	20	**80**
	30	45
30	0	-5
	10	**57**
	20	47
	30	-30

Fuente: Elaboración propia

De la Tabla 4 se desprende la decisión óptima en la etapa 4 para cada estado inicial y el beneficio máximo correspondiente. Esto se presenta en la Tabla 5.

Tabla 5: Decisión optima en la etapa 4 según el stock inicial en la etapa 4

$x(3)$	$u^*(3)$	$V_3^*\{x(3)\}$
120	30	195,00
110	30	188,00
100	30	180,00
90	30	170,00
80	30	158,00
70	30	141,00
60	30	120,00
50	20	100,00
40	20	80,00
30	10	57,00

Fuente: Elaboración propia

La Tabla 5 permite definir al decisor cuánto extraer del recurso de acuerdo con el stock disponible, por ejemplo: Si al comienzo de la etapa 4 se contaba con 80 unidades de stock del recurso, la decisión óptima es extraer 30 unidades y el beneficio óptimo será de 158,00.

Una vez que se definió la política óptima dado cada stock inicial, en la etapa 4 se procede a ampliar el problema secuencialmente, por lo que se incorpora la etapa 3.

Etapa 3 ($k = 2$)

Sea el stock del recurso al comienzo de la etapa 3: $x(2), p(2) = 7$, la ecuación de Bellman para la etapa 3 será:

$$V_2^*\{x(2)\} = \underset{u(2)\in\{0,10,20,30\}}{MAX} \left\{7 * u(2) - c\big(x(2), u(2)\big) + 0.6 * V_3^*\{x(3)\}\right\}$$

De esta manera se debe seleccionar, en la Etapa 3, el valor de $u^*(2)$ que maximiza al funcional $V_2^*\{x(2)\}$ cuando el stock disponible al comienzo de la etapa es $x(2)$.

Los posibles valores de: $x(2) \in \{120,110,100,90,80,70,60\}$

Se procede a armar la tabla de beneficios obtenidos según el stock disponible al comienzo de la etapa 3 (Tabla 6), nuevamente para una mejor comprensión en la tabla se han incorporado los cálculos realizados cuando el stock inicial en la etapa 3 es de 120 unidades.

Tabla 6: Beneficio en función del stock inicial ($x(2)$) y las diferentes políticas de extracción ($u(2)$) en la Etapa 3

$x(2)$	$u(2)$	$V_2[x(2), u(2)] = 7 * u(2) - c[x(2), u(2)] + 0.6 * V_3^*\{x(3)\}$
120	0	$V_2[120{,}0)] = 7 * 0 - c[120{,}0] + 0.6 * V_3^*\{120\}$ $V_2[120{,}0)] = 0 - 5 + 0.6 * 195 = 112$
	10	$V_2[120{,}10)] = 7 * 10 - c[120{,}10] + 0.6 * V_3^*\{110\}$ $V_2[120{,}10)] = 70 - 8 + 0.6 * 188 = 174{,}80$
	20	$V_2[120{,}20)] = 7 * 20 - c[120{,}20] + 0.6 * V_3^*\{100\}$ $V_2[120{,}20)] = 140 - 33 + 0{,}6 * 180 = 215{,}00$
	30	$V_2[120{,}30)] = 7 * 30 - c[120{,}30] + 0.6 * V_3^*\{90\}$ $V_2[120{,}30)] = 210 - 75 + 0.6 * 170 = 237{,}00$
110	0	107,80
	10	168,91
	20	205,64
	30	**222,98**
100	0	103,00
	10	162,00
	20	194,80
	30	**204,60**
90	0	97,00
	10	153,69
	20	180,16
	30	**182,00**
80	0	89,80
	10	142,10
	20	**162,00**
	30	157,50
70	0	79,60
	10	127,71
	20	**142,86**
	30	129,43
60	0	67,00
	10	113,33
	20	**121,33**
	30	94,20

Tabla 7: Decisión óptima en la etapa 3 según el stock inicial en la Etapa 3

$x(2)$	$u^*(2)$	$V_2^*\{x(2)\}$
120	30	237,00
110	30	222,98
100	30	204,60
90	30	182,00
80	20	162,00
70	20	142,86
60	20	121,33

Fuente: Elaboración propia

Etapa 2 ($\boldsymbol{k=1}$)

El stock del recurso al comienzo de la etapa 2 es: $x(1), p(1) = 8$

La ecuación de Bellman para la etapa 2 será:

$$V_1^*\{x(1)\} = \underset{u(1)}{MAX} \quad \{8 * u(1) - c(x(1), u(1)) + 0.6 * V_2^*\{x(2)\}\}$$

Tabla 8: Beneficio en función del stock inicial ($x(1)$) y las diferentes políticas de extracción ($u(1)$) en la Etapa 2

$x(1)$	$u(1)$	$V\{x(1)\}$
120	0	137,20
	10	205,45
	20	249,43
	30	**274,20**
110	0	128,79
	10	193,67
	20	232,84
	30	**255,38**
100	0	117,76
	10	179,20
	20	217,20
	30	**235,72**
90	0	104,20
	10	166,09
	20	201,27
	30	**212,80**

Fuente: Elaboración propia

Tabla 9: Decisión óptima en la etapa 2 según el stock inicial en la Etapa 2

$x(1)$	$u^*(1)$	$V_1^*\{x(1)\}$
120	30	274,20
110	30	255,38
100	30	235,72
90	30	212,80

Fuente: Elaboración propia

Una vez resuelto el subproblema se avanza a la etapa inicial para finalizar el proceso.

Etapa inicial: etapa 1 ($\boldsymbol{k=0}$)

Sea el stock del recurso inicial dado en el enunciado del problema: $x(0) = 120$

La ecuación de Bellman para la etapa 1 con $k = 0$ será:

$$V_0^*\{x(0)\} = \underset{u(0)}{MAX} \quad \{6 * u(0) - c(x(0), u(0)) + 0.6 * V_1^*\{x(1)\}\}$$

Tabla 10: Beneficio en función del stock inicial ($x(0)$) y las diferentes políticas de extracción ($u(0)$) en la etapa 1

$x(0)$	$u(0)$	$V\{x(0)\}$
120	0	159,52
	10	204,89
	20	228,10
	30	**232,68**

Fuente: Elaboración propia

En la Tabla 10 se observa que el valor máximo se da cuando $u(0) = 30,$ y el valor máximo del beneficio a valor presente es: $V_0^*(120) = 232{,}68$.

Tabla 11: Decisión óptima en la etapa 1 según el stock inicial en la etapa 1

$x(0)$	$u^*(0)$	$V_0^*\{x(0)\}$
120	30	232,68

Fuente: Elaboración propia

De esta forma se finaliza el procedimiento de programación dinámica, y así es posible establecer la política de extracción óptima para las cuatro etapas revisando las tablas óptimas (Tablas: 11, 9, 7 y 5). Así, en la Etapa 1 la extracción óptima es de 30 unidades ($u^*(0) = 30$) resultando un estado inicial para la Etapa 2 de 90 ($x(1) = 90$), por lo que la decisión óptima para la segunda etapa será de 30 ($u^*(1) = 30$). El estado inicial en la etapa 3 es de 60 ($x(2) =$ 60) y la decisión óptima es de 20 ($u^*(2) = 20$), por último, la etapa 4 se inicia con un estado de 40 ($x(3)$=40) correspondiendo una decisión óptima es en este ejemplo de 20 ($u^*(3) = 20$). El stock restante del recurso será de 20 unidades ($x(4) = 20$).

Como resultado final, la mejor política de gestión del recurso consiste en extraer 30 unidades en las dos primeras etapas y 20 unidades en las dos últimas, quedando al final del horizonte temporal 20 unidades y arrojando un valor presente de beneficio máximo de 232,68.

CONCLUSIÓN

En este trabajo se han explicado las características básicas de la programación dinámica determinística a través de un ejemplo de gestión óptima de un recurso natural no renovable en un horizonte de tiempo determinado. El objetivo del problema planteado fue mostrar la utilidad de la optimización dinámica y así enseñar el manejo de esta técnica cuantitativa en contextos de tiempo discreto y horizonte temporal finito.

En el caso que hemos analizado la función objetivo es de maximización y las variables de estado (stock del recurso minero) y de decisión (cantidad a extraer en cada período) son discretas, pero como ya se ha mencionado en el trabajo, este método es aplicable también cuando el objetivo es de minimización.

Asimismo, es importante observar que, si bien se ha identificado la gestión óptima de extracción para el problema dado, esta metodología también permite conocer cómo proceder si el decisor se desviara de la trayectoria óptima.

Para seguir avanzando en la resolución de diferentes problemas vinculados con la gestión de inventarios o con las políticas de inversión, es posible encontrar más aplicaciones de la programación dinámica en libros de investigación operativa como los de Hillier et al. (2010) y Taha Hamdy (2012). Asimismo, se recomienda para profundizar en los desarrollos matemáticos utilizados en optimización dinámica los libros de Cerdá Tena (2012) y De la Fuente (2000).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cerdá Tena, E. (2012). *Optimización dinámica*. México. Alfaomega.

De la Fuente, A. (2000). *Mathematical methods and models for economists*. UK. Cambridge University Press.

Hillier F.S., Lieberman G. J. (2010). *Introducción a la Investigación de Operaciones.* México. Mc Graw Hill.

Taha Hamdy A. (2012). *Investigación de Operaciones*. México. Pearson.